Utmanande ändlösa additioner?

Barbro Grevholm & Lars Mouwitz

Varje elev har rätt till vägledning och stöd utifrån sina förutsättningar. Ofta sätts, med all rätt, fokus på elever med särskilda svårigheter. Men vad ska vi göra med en elev som är särskilt intresserad och framgångsrik? Ska en sådan elev "räkna före" på egen hand ofta med trista rutinproblem som ger sysselsättning medan läraren hjälper de övriga – eller finns det andra vägar att gå som förstärker ett spirande matematikintresse?

En omättlig elev

För en tid sedan fanns en helsidesartikel i en av våra större lärarfackliga tidningar om den nioårige Johan och hans stora matematikintresse.

Av artikeln framgår att Johan med lätthet avverkat den ena matematikboken efter den andra i skolan och att hans "frustrerade" lärare beslöt att ge sin omättlige elev något rejält att sätta tänderna i. Och Johan arbetade förstås med det problem han fick! I flera veckor, även efter skolan, ägnade han sig åt att utföra ändlösa additioner för att söka svaret på uppgiften, se nästa sida.

Vad var det för avsikt med artikeln? Var den tänkt som en solskenshistoria? I så fall anser vi att det finns anledning att reflektera lite djupare över situationen. Visar exemplet kanske snarare ett av den svenska grundskolans problem i ett nötskal? Att det är svårt för lärare att få tid och ha kraft att ta hand om duktiga och intresserade elever på ett bra sätt? Vi diskuterar här situationen utan att för den skull klandra någon särskild person.

Varför är läraren "frustrerad"? Han borde väl ha varit glad över en så intresserad, ihärdig och duktig elev? Har läraren inte tillgång till överkursexempel eller rika uppgifter som passar att ge till elever som vill öka sina kunskaper? Hur ser läromedlen ut i detta avseende? Eller hade inte läraren tid att handleda Johan så att matematiken blev ett äventyr?

Den uppgift Johan fick skulle med rätt ledning ha kunnat bli en rik uppgift, men nu fick Johan istället ett meningslöst slavgöra med ändlösa additioner. Ett sådant oerhört beräkningsarbete måste nästan med nödvändighet innehålla fel, och även Johan fick förstås fel svar. Dessutom gav det enorma arbetet inte Johan några nya kunskaper eller insikter, addera kunde han ju redan.

Utvecklande uppgifter

Kan Johans lärare få hjälp någonstans med att finna lämpliga uppgifter åt Johan, konstruktiva uppgifter som låter Johan utveckla sitt tänkande? Ja, det menar vi att han kan. Det finns god litteratur att använda som källor för elever i olika åldrar, se litteraturlista. I Nämnaren och NämnarenTEMA finns ett rikhaltigt material med spännande problem och många förslag på undersökande arbetssätt. På Internet kan vi idag finna ett otal uppgiftsbanker med stimulerande uppgifter på olika nivåer.

***Barbro Grevholm** är universitetslektor vid Högskolan i Kristianstad. **Lars Mouwitz** är gymnasielärare och arbetar på NCM med bl a Nämnaren.*

Ett berömt problem

Det berättas att uppfinnaren av schackspelet önskade sig ett vetekorn på första rutan, två korn på andra, fyra korn på tredje osv. Och på detta sätt skulle antalet korn fördubblas för varje ruta till och med den 64:e rutan. Hur många vetekorn blev det tillsammans?

Den uppgift som Johan gav sig i kast med var den berömda historien om vetekornen på schackbrädet, se rutan ovan. Vanligen är problemställningen att beräkna det sammanlagda antalet vetekorn, men Johan fick i uppgift att beräkna antalet på 64:e rutan. Johan ville inte använda miniräknare eftersom han då inte hade fått ett exakt svar. Det var nödvändigt att göra beräkningarna för hand för att få med alla siffror. Johans metod blev då att söka svaret genom att genomföra ett stort antal additioner. Man kan förstå Johans önskan om ett exakt svar, men magistern hade väl kunnat använda miniräknaren i efterhand för att visa Johan att hans svar avsevärt avvek från det korrekta?

Vad kan man göra?

Det finns många sätt att styra arbetet med en sådan här uppgift så att den berikar och utvecklar en ung människas matematikintresse. Vi ska här bara nämna några exempel. Alla exemplen förutsätter en aktiv lärare som fungerar som en mentor under arbetets gång.

– Föreslå Johan att först arbeta med ett *enklare problem* av samma typ. Börja med ett mindre bräde, kanske med fyra eller nio rutor, för att kunna se mönster och upptäcka lösningsmetoder som kan generaliseras. Att lära sig problemlösningsmetoder ökar det matematiska kunnandet till skillnad från ändlösa additioner.

– Uppmuntra Johan att försöka *finna mönster* t ex för slutsiffran: på fjärde rutan 8 korn, på åttonde rutan 128 korn, på tolfte rutan 2048 korn osv. Vilken slutsiffra är det då på sextiofjärde rutan? Att finna mönster är en viktig verksamhet, som i högre årskurser leder fram mot funktionsbegreppet.

– Man kan hjälpa Johan genom att *introducera nya effektiva begrepp*, i detta fall potenser med basen två. Johan hade säkert tyckt att det var spännande att få ta del av ett nytt skrivsätt, och ett kraftfullt verktyg för att lösa problem av många slag. Dessutom hade Johan fått en insikt om att det matematiska symbolspråket är till för att göra matematiken *enklare*, inte svårare! Med hjälp av potensbegreppet blir det lätt att *generalisera* lösningen, så att den gäller för valfritt stora schackbräden och inte bara för dubblering av antalet vetekorn.

– Man kan visa för Johan att det finns *alternativa representationer*, i detta fall ge en vink om hur binära tal fungerar. Talet 8 på fjärde rutan skrivs 1000, talet 16 på femte rutan skrivs 10000. Hur ska man då skriva det sökta talet på sextiofjärde rutan i binär form? Det problemet hade säkert Johan löst mycket snabbt! Totalsumman av antalet vetekorn skrivs lätt som en enda lång rad med ettor. Ett svårt problem förvandlas alltså till ett lätt genom att man använder en annan bas i positionssystemet!

– Om nu Johan prompt ville veta alla siffrorna i det sökta talet uttryckt med vårt vanliga tiosystem, kunde han även här fått hjälp. Själva beräkningsdelen kan *förenklas och göras överskådlig*. Kanske hade Johan med rätt hjälp till och med kunnat förstå sig på denna omskrivning:

$$2^{63} = (2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^7) \cdot (2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^7) \cdot (2^7 \cdot 2^7 \cdot 2^7) = \\ = (2\ 097\ 152)^3$$

Istället för de ändlösa additionerna kunde Johan då löst problemet mer överskådligt i ett begränsat antal steg, om han kan använda algoritmen för multiplikation. Ett syfte med problemlösning är att tänka ett steg till och därmed spara en mängd arbete och minska risken för fel.

Genier och vi andra

Artikelns berättelse påminner oss om en historia som berättas om matematikern Karl Friedrich Gauss (1777-1855), en av

modern tids största matematikgenier. Det sägs att en likaledes frustrerad lärare satte honom i arbete med en trist och tidskrävande uppgift. Den lille Gauss blev ombedd att addera alla tal från 1 till 100. Läraren fick dock inte den stillhet han sökte, redan efter någon minut var Gauss tillbaka med svaret 5050. Antagligen hade Gauss lagt ihop 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98 osv. Alla sådana summor blir 101 och det är femtio stycken. Nu är genier av Gauss kaliber mycket sällsynta och vi andra behöver en aktiv ledning och välvalda problem för att utveckla vårt matematiska kunnande.

Vi menar att det är lärarna för elever i de tidiga åldrarna som har möjlighet att visa hur spännande och vacker matematiken är, genom att erbjuda eleverna sådana arbetsuppgifter att de kan utvecklas efter sin förmåga och sina möjligheter.

Johan är ännu i ”kalenderbitaråldern” och kan fascineras av att arbeta med stora tal, men vi tror inte att han kommer att vilja vara med om så värst många upplevelser av det slag som beskrivs i artikeln. Han kommer snart att känna att han inte utvecklas. Däremot vet vi att om hans intresse fångas upp tidigt och får utvecklas i lagom takt med lämpliga aktiviteter och god ledning kan han bli en av de matematiker eller naturvetare som Sverige nu ropar efter.

Artikeln om Johan blev inte någon solskenshistoria, tvärtom visar den oavsiktligt på det starka behovet av fortbildning av matematiklärare och alla andra kategorier av lärare som undervisar i matematik.

Denna bild, som ges av matematiken som ett ämne där en elev arbetar i veckor med meningslösa, ändlösa beräkningar, är förödande. Det är verkligen hög tid att media lyfter fram matematikämnet som ett spännande och utmanande ämne!

Litteratur

Burton, L., Stacey, K. & Mason, J. (1985). *Thinking mathematically*. Wohingham: Addison-Wesley.

Burton, L. m fl (1984). *Thinking things through*. Oxford: Blackwell.

Coates, G. D., Stenmark, J. K. (1997). *Family Math for young children*. Lawrence Hall of Science, University of California.

Dahl, K. (1994). *Matte med mening, tänka tal och söka mönster* Stockholm: Alfabeta.

Dahl, K. (1996). *Räkna med mig!* Stockholm: Alfabeta.

Dahl, K. (1998). *Ska vi leka matte? Finurliga lekar och spel.* Stockholm: Alfabeta.

Dawnie, D., Slesnick, T. & Stenmark, J. K. (1981). *Math for girls and other problem solvers*. Lawrence Hall of Science, University of California.

Emanuelsson, G., Johansson, B. & Ryding, R. (red) (1991). *Problemlösning*. Lund: Studentlitteratur.

Erickson, T. (1989). *Get it together. Math problems for groups. Grades 4-12*. Lawrence Hall of Science, University of California.

Furness, A. (1988). *Mönster i matematiken.* Stockholm: Ekelunds förlag.

Grevholm, B. (1988). *Utmaningen. Problem och tankenötter i matematik.* Malmö: Gleerups.

Grevholm, B. (1989). *Lilla utmaningen. Problem och tankenötter i matematik.* Malmö: Gleerups.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. New York: Doubleday & Company Inc.

Stacey, K. (1983). *Teacher tactics for problem solving*. Canberra: Curriculum Development Centre.

Stenmark, J. K. (1995). *101 short problems from Equals.* Lawrence Hall of Science, University of California.

Stenmark, J. K, Thompson, V, Cossey, R. (1988). *Matte hemma, matte i skolan.* Lund: Utbildningshuset Studentlitteratur.

Strandberg, L. (1991). *Problemboken.* Malmö: Liber.

Thompson, V. & Mayfield-Ingram, K. (1998). *Family Math. The Middle School Years*. Lawrence Hall of Science, University of California.

Ulin, B. (1988). *Att finna ett spår.* Stockholm: Utbildningsförlaget.

Ulin, B. (1993). *Liten guide för matematiska problemlösare.* Stockholm: Liber utbildning.

Vaderlind, P. (1989). *Räkna och tänk*. Stockholm: Natur och Kultur.

Vaderlind, P. (1990). *101 tankenötter*. Stockholm: Natur och Kultur.

Rika problem i Nämnarenutgåvor

I Nämnaren presenteras rika uppgifter i *Problemavdelningen*. Artikelserien *Dialoger om problemlösning* tar upp exempel, som också kan lämpa sig för elever. I NämnarenTEMA, finns många undersökande aktiviteter. I *Matematik – ett kommunikationsämne* och *Matematik – ett kärnämne* finns speciella kapitel om problemlösning med *Problemsamlingar*.