Högskolan Kristianstad
291 88 Kristianstad
044-20 30 00
www.hkr.se

EXAMENSARBETE

Våren 2011

Lärarutbildningen

”Det var något med *n*”

- En intervjustudie om elevers förståelse för variabler

Författare
Frida Stjernquist

Handledare
Kristina Juter

www.hkr.se

”Det var något med *n*”

- En intervjustudie om elevers förståelse för variabler

Abstract

Elever ska efter grundskolans matematik inneha en vana i att räkna med uttryckssymboler. Jag har märkt, i mitt arbete som lärare, vilka svårigheter gymnasieelever kan besitta i förståelsen för variabelbegreppet. Undersökningens syfte har varit att undersöka elevers förståelse för variabelbegreppet, vid lösning av en uppgift som innebär att hitta mönster, samt vad eventuella svårigheter kan bero på. Litteratur och forskning har studerats och sedan har intervjuer skett med elever från årskurs ett på gymnasiet. Sex stycken intervjuer har genomförts varav en pilotstudie. Eleverna fick i uppgift att lösa ett öppet matematiskt problem som handlade om att hitta mönster. I slutet av uppgiften skulle en generell lösningsmetod hittas och därmed skulle förståelsen för variabelbegreppet prövas. Två av eleverna lyckades lösa uppgiften fullständigt och visade förståelse för variabelbegreppet. De tre övriga eleverna visste inte hur de skulle angripa problemet då en generell lösning skulle hittas. De slutsatser jag kan dra utifrån min studie är att drygt hälften av eleverna saknar kunskap eller har dålig erfarenhet av variabelbegreppet.

Ämnesord: Algebra, problemlösning, variabel

INNEHÅLL

1 Introduktion

Under följande avsnitt introduceras studiens fokus i form av en bakgrund. Bakgrunden bygger på egna erfarenheter av matematikämnet i skolan. I slutet av introduktionen kommer studiens syfte att presenteras och kommer att leda fram till undersökningens huvudfråga.

1.1 Bakgrund

Att många elever har svårigheter med skolans matematik har knappast föregått någon matematiklärare. Jag gjorde upptäckten under min erfarenhet som gymnasielärare. Det som särskilt föll mig i intresse var elevernas svårigheter för den abstrakta matematiken vid problemlösning. Jag upptäckte att det var många elever som hade svårt att tillämpa bokstavsmatematiken vid generaliseringar.

I slutet av grundskolan ska godkända elever i matematik behärska grundläggande algebra, de ska alltså inneha en vana i att räkna med uttryckssymboler (Lpo94). De ska även vara erfarna med matematisk problemlösning. Elever ska alltså behärska räkning med bokstäver. Genom att undersöka vilken förståelse nuvarande ettor på gymnasiet har för variabelbegreppet kan jag analysera det uppfattade problemet ytterligare. I slutet av nästa vår, då Lgr 11 har trätt i kraft, ska elever som slutar grundskolan dessutom inneha en *förståelse* för variabelbegreppet. En vidare fundering till lärare kan då vara hur man kan arbeta för att öka den abstrakta förståelsen hos elever, vilket enligt det hävdade problemet kommer bli en nödvändighet.

1.2 Syfte och frågeställning

Syftet med undersökningen är att belysa vad elever har för förståelse för variabelbegreppet vid generaliseringar vid lösning av ett öppet matematiskt problem. Undersökningen kan hjälpa mig i mitt arbete som lärare då jag kommer få en större uppfattning om elevers svårigheter i den abstrakta matematiken.

Följande frågeställningar har skapats.

- Vilken förståelse har elever som läst grundskolans matematik för variabelbegreppet vid lösning av en uppgift som innebär att hitta mönster?
- Vad beror eventuella svårigheter på?

2 Litteraturgenomgång

Inledningsvis presenteras historiken kring algebra och variabler. Det följs upp av styrdokumentens innehåll. Därefter tas problemlösning upp och vikten i att lära sig denna gren inom matematik. Variabelbegreppet presenteras och följs upp med de svårigheter som kan förekomma för dess förståelse. Litteraturgenomgången avslutas med svårigheter som elever kan stöta på vid problemlösning.

2.1 Historik

Det äldsta fyndet som hittats av matematisk härkomst är omkring 30 000 år gammalt. Det består av organiserade skåror i ett ben som tros ha använts vid uppräkning av något slag (Thompson, 1996). Enligt upptäckter skulle det dröja fram till 8000 f. Kr. innan talsymboler började användas (Johansson, 2004). De har sedan dess utvecklats till de symboler vi använder oss av idag, arabiska siffersystemet. Då människan började se de matematiska symbolerna som objekt, istället för antal eller mängd av någonting, började även räknesätten bli mer avancerade och problemlösningen nådde nya nivåer (Johansson, 2004). Det var matematikern François Viète som i slutet av 1500-talet introducerade variabla storheter i samband med funktioner (Sjöberg, 2001). Användning av variabla storheter innebar att man nu kunde generalisera istället för att prova varje fall för sig som man tidigare tvingats till. Variabelbegreppet utvecklades under 1600-talet inom grenen *analys* av matematiker som bland annat René Descartes, Isaac Newton och Gottfried Wilhelm Leibniz (Sjöberg, 2001).

Håller vi oss till Europa, började skolor öppnas för utbildning av grundläggande matematik i slutet av 1200-talet. Matematiken var en nödvändighet inom handeln (Johansson, 2004). Matematik har alltid setts som ett ämne som är viktigt i vardagslivet och har funnits med som ett ämne sedan den första folkskolan öppnade i Sverige. I dagens Sverige är matematik ett kärnämne i skolorna, vilket innebär att ämnet är obligatoriskt för alla elever i grundskolan och i gymnasieskolan.

2.2 Styrdokument

Går man tillbaka och tittar på de första kursplanerna i matematik från 1878 så förstår man att matematik alltid har uppfattats som ett ämne som är bra att ha med sig i livet. Fokus har lagts på att lära sig den enkla matematik som man stöter på i vardagslivet så som räkning med de fyra räknesätten – aritmetik.

I senare kursplaner visar sig ordet algebra i målet för matematik. ”Undervisningen har till uppgift att ge kunskap och färdighet i elementär aritmetik och algebra…” (Lgr 62 s.164). I Lgr 80 markeras det att algebra inlärs för att utveckla elevens logiska tänkande. Det markeras att algebra och funktionslära är mindre viktigt i vardagslivet men att eleverna ändå ska ha en viss kunskap inom området. Det understryks att det är viktigt att lära ut det eleverna har nytta av i vardagslivet eller i andra skolämnen. Endast om eleven visar intresse för den mer abstrakta matematiken ska detta läras ut. Det tydliggörs att det krävs en viss mognad för att klara den sorten av matematik (Lgr 80).

I grundskolans kursplaner idag står det inget uttalat om variabelbegreppet. Däremot ska eleven ha kunskap i att använda sig av matematiska uttryckssymboler och använda sig av grundläggande algebraiska begrepp (Lpo 94). I de nya kursplanerna som börjar gälla höstterminen 2011 (Lgr 11) står det uttryckligen att elever ska förstå ”*Innebörden av variabelbegreppet och dess användning i algebraiska uttryck, formler och ekvationer*” (Lgr 11 s. 35). Det finns alltså tydligt med i kursplanen att läraren ska lägga fokus vid variabelbegreppet, kanske i större grad än vad man tidigare gjort.

2.3 Matematisk problemlösning

Det finns olika sätt att definiera vad problemlösning inom matematiken är. En matematisk uppgift kan uppfattas som problemlösning för en individ men inte för en annan. Det beror alltså på vem som tillfrågas om uppgiften uppfattas som ett problem eller inte (Björkqvist, 2001). På liknande sätt menar Mouwitz (2003) att då problemlösaren har fått rutin för hur problemet ska lösas är uppgiften inte längre en problemlösning utan en rutinuppgift.

Ett öppet matematiskt problem är ett problem där det finns flera lösningsmetoder, ett problem som kan bemötas på olika sätt. Enligt Hagland m.fl. (2005) är benämningen på ett problem ”*en matematisk uppgift som en person vill eller behöver lösa*” (Hagland m.fl., 2005 s. 28). För att öka elevernas nyfikenhet för matematiska problem och få dem att vilja lösa problem har Hagland med flera lagt till ytterligare kriterier och kallar det för ett *rikt* matematiskt problem. Definitionen för rika problem enligt Hagland m.fl. är följande;

1. Problemet ska introducera viktiga matematiska idéer eller vissa lösningsstrategier.
2. Problemet ska vara lätt att förstå och alla ska ha en möjlighet att arbeta med det.
3. Problemet ska upplevas som en utmaning, kräva ansträngning och tillåtas ta tid.
4. Problemet ska kunna lösas på flera olika sätt, med olika strategier och representationer.
5. Problemet ska kunna initiera en matematisk diskussion utifrån elevernas skilda lösningar, en diskussion som visar på olika strategier, representationer och matematiska idéer.
6. Problemet ska kunna fungera som brobyggare mellan olika matematiska områden.
7. Problemet ska kunna leda till att elever och lärare formulerar nya intressanta problem.

(Hagland m.fl., 2005, s.28-30)

Uppsatsens undersökning kommer att bygga på ett rikt matematiskt problem som definieras enligt Hagland m.fl. (2005). Fokus kommer att ligga på att lösa ett rikt matematiskt problem som kommer att leda fram till användningen av en variabel *n*.

2.4 Varför ska elever lära sig problemlösning?

Som tidigare tagits upp står problemlösning med i kursplanerna. Det är viktigt att eleven får öva på problemlösande uppgifter för att det matematiska tänkandet ska utvecklas. Hagland m.fl. (2005) menar att då elever får tillfälle att arbeta med problemlösning får de även tillfälle att öva sig i att tillämpa sina redan besittande kunskaper på ett varierande sätt. Vid problemlösning möter eleven en utmaning vilket kan öka elevens nyfikenhet och intresse för matematik. Det handlar även om att förbereda sig för framtiden. *”Via undervisning i problemlösning kan de få möjligheter att samla på sig en mängd lösningsstrategier, som de kan ta till i olika situationer senare i livet.”* (Hagland m.fl., 2000 s. 13). Detta stöds av Mouwitz m.fl. (2003) som menar att problemlösning ökar det logiska tänkandet och gör att eleven har lättare att ta sig an problemställningar som kan dyka upp i andra sammanhang i vardagslivet. Eleven får vid problemlösning tillfälle att själv välja tillvägagångssätt utan att ha en ’mall’ att följa som den traditionella matematikundervisningen ofta innebär enligt Mouwitz m.fl. (2003).

I dagens undervisning fokuseras problemlösningen inom det område som vid tillfället bearbetas. Istället, menar Lester m.fl. (2006), borde problemlösningens fokus ligga på att utveckla nya kunskaper hos eleven. I dagens undervisning är det bestämt att det är läraren och boken som sitter med de korrekta svaren och de korrekta tillvägagångssätten för att lösa en uppgift (Lester m.fl., 2006). Eleverna lär sig att det är de metoder som presenteras på matematiklektionerna som är de mer korrekta. Får eleverna arbeta med problemuppgifter lär sig eleverna ett visst sätt att tänka vilket innebär att de lär sig att lösa matematiska problem i olika situationer (Lester m.fl., 2006). ”*Vi anser att de primära målen med matematiklärande är förståelse och problemlösning. Dessa två mål är naturligt relaterade till varandra eftersom förståelse uppnås bäst genom problemlösning*” (Lester m.fl., 2006 s.97). Det finns många fördelar med problemlösning i skolan. Enligt Lester m.fl. har elever med erfarenhet att lösa matematiska problem mer självtillit att lyckas lösa andra problem. De ser problemlösning som en utmaning istället för ett hinder. Bergsten m.fl. (1997) menar att det är viktigt att problemet är påtagligt och att det stimulerar fantasin. Det de flesta forskare är överens om är att problemlösning främjar individens lärande i en positiv riktning.

2.5 Förståelse för variabelbegreppet.

Symboler har använts under lång tid inom algebran. Variabelbegreppet däremot utvecklades från analysen och uppstod först, som tidigare nämnts, i slutet av 1500-talet. I *Svenska Akademiens Ordlista* definieras en variabel som en ”föränderlig storhet” (SAOL13, 2006, s.1060). I en matematikbok från kursen Matematik A förklaras en variabel som en bokstav som finns med i en formel för en generell regel (Holmström och Smedhamre, 2000).

En variabel kan ofta uppfattas som en siffra som så småningom kommer att anges och därmed vara bestämd. Radford m.fl. (2005) menar att många elever förväxlar en variabel med en symbol som ersätter *ett* tal. Forskningen visar alltså att många av eleverna använder variabeln som en parameter, en symbol som vid olika omständigheter har en bestämd betydelse. Variabeln *n* ersätts av ett *x* som i matematikens värld står för ett bestämt värde vid en viss tidpunkt (Radford m.fl., 2005).

Bokstavsräkning, eller ett mer matematiskt begrepp – algebra, är något som alla elever ska lära sig. I grundskolan då algebra introduceras får eleven ofta lära sig att ersätta det okända med bokstaven *x*. *X* står för något okänt och symbolen är för eleverna bekant. En studie av Radford m.fl. (2005) visar att elevernas accepterande för ett obestämt värde är ett hinder för dem i deras förståelse för variabelbegreppet. De känner att de måste lösa ut ”det okända”. Ett svårare steg för eleven är variabelbegreppet, då bokstavens betydelse kan variera.

En av de grundläggande kunskaperna i att kunna hantera algebra är att förstå betydelsen av bokstäver som står för något som kan variera. Bergsten m.fl. (1997) tar upp hur algebraisk räkning kan påverka elevens motivation negativt då den ofta uppfattas som abstrakt och obegriplig. Eleven ser inte nyttan med att lära sig det. Bergsten m.fl. (1997) tar även upp den algebraiska cykeln. Den algebraiska cykeln beskriver tre faser som man måste hantera då man arbetar algebraiskt och handskas med problemlösning. De tre faserna är *översättning, omskrivning* och *tolkning.* Den första fasen handlar om att översätta det matematiska problemet till symboler som sedan kan hanteras algebraiskt i den andra fasen. I sista fasen ska man kunna tolka det man kommit fram till med ett vardagligt språk. För att kunna handskas med problemlösning och ha en förståelse för bokstavsräkning är det viktigt att eleven erhåller kunskaper i de olika faserna (Bergsten m.fl., 1997).

2.6 Svårigheter i problemlösning och algebra

Det finns mycket inom matematiken som kan uppfattas som abstrakt. Då koppling inte kan göras med verkligheten kan en matematisk uppgift bli obegriplig. En av skolverkets publikationer visar att många elever är ute efter relevans och förståelse inom matematiken (Skolverket, 2003). Förståelse skapar nöje att lösa matematiska uppgifter. De flesta elever förstår att de fyra räknesätten är viktiga att lära sig men de har oftast svårare att förstå varför de ska lära sig algebra eller ekvationer. Meningen med det som ska göras har stor betydelse för motivationen (Skolverket, 2003). Den främsta motiveringen för att räkna matematik i de senare skolåren är betygen. Ligger intresset endast i betygen är risken stor att eleven endast gör det som behövs och missar nöjet med att gå på upptäcktsfärd i matematikens värld. Har eleven misslyckats för många gånger har ofta intresset för matematik minskat och eleven är inte motiverad att försöka allt för många gånger (Skolverket, 2003).

Enligt Tall (2005) går den matematiska förståelsen från det konkreta till symboler. En elev måste förstå det konkreta innan det ersätts av symboler. Den formella matematiken kan sedan byggas på till individens förståelse av den konkreta och symboliska matematiken. Tall (2005) menar att det formella tänkandet är en motsats till det tänkande som elever gör då de kopplar problemen till verkligheten. I det formella tänkandet är eleven tvungen att börja använda olika matematiska regler för att lösa problemet istället för att börja med att konkretisera det.

I vissa fall då elever löser matematiska problem stöter de på hinder av olika slag. Orsaken är enligt Möllehed (2001) brister i matematiska och kognitiva färdigheter. Möllehed menar även att en vilja måste finnas från problemlösaren, finns viljan så finns det ett behov av att problemet måste lösas. Många elever är fokuserade på att hitta en lösning så fort som möjligt vilket innebär att eleven ger upp efter en kort stund om ingen lösning hittats till problemet. Därför måste lärare lära elever att problemlösning tar tid (Möllehed, 2001). För eleven är det ofta svaret som är det viktiga och inte kunskapen som leder dit.

Skolverkets rapport (2003) visar att förmågan att gå från den konkreta världen till den abstrakta varierar stort hos elever i samma ålder. Det beror delvis på lärarens prioriteringar i matematikundervisningen. Samma undersökning visar att eleverna är i behov av mer praktiska tillämpningar av den abstrakta matematiken för att förstå. Konkretisering av det abstrakta behövs. Det säger även Tall (2005) som menar att det ligger i människans natur att konkretisera.

Ett annat hinder vid problemlösning i matematik kan vara det matematiska språket. Riesbeck (2000) menar att svårigheter kan uppstå då elever tillämpar vardagsspråket vid lösning av matematiska problem. Hon menar att matematiken är ett språk som eleven måste lära sig. Däremot är det viktigt att inte bara fokusera på ett språk vid problemlösning. Då är det lätt att fastna i uppgifter som innefattar vardagsproblem. Eleven ska kunna växla mellan det matematiska språket och vardagsspråket och ska därför även kunna behärska båda språken

(Riesbeck, 2000). Använder man sig endast av det matematiska språket där det indirekt uppfattas som att det alltid finns en lösning på problemet kan man missa vardagliga aspekter. Det är viktigt att eleven kan uttrycka aritmetiska problemet med egna ord för att utveckla det matematiska språket (Bergsten m.fl., 1997).

Bergsten m.fl. (1997) tar även upp hur förvirrande det kan vara för elever att räkna med bokstäver ”*Ibland står bokstaven bara för ett bestämt men obekant tal, som man ska hitta, ibland står den inte för något bestämt tal alls, utan för tal som kan variera, och ibland står den för ett godtyckligt men konstant tal*” (Bergsten m.fl., 1997, s. 15).

3 Empirisk del

Den empiriska delen inleds med en motivation till vald uppgift. Urvalet och resultatet från pilotstudien presenteras. Sedan tas studiens genomförande upp och avsnittet avslutas med en resultatdel där även resultatens slutsatser tas upp.

3.1 Val av uppgift

Jag har valt att genomföra undersökningen med ett rikt matematiskt problem. Kriterierna för ett rikt problem nämns i litteraturgenomgången. Problemet heter *stenplattorna* och handlar om att finna mönster (bilaga). Problemet är lånat från boken *Rika matematiska problem* Hagland m.fl. (2005). Jag har däremot valt att ta bort en tillhörande uppgift e). Anledningen är att uppgiften inte är relevant för min undersökning.

Jag valde en uppgift som handlar om att hitta mönster. Uppgiften börjar med tre konkreta uppgifter och avslutas med att hitta en generell lösningsmetod. Jag valde att testa elevers förståelse av variabelbegreppen med den här typen av uppgift delvis på grund av att uppgiften börjar konkret. En naturlig övergång mot det generella kan ske och jag får möjlighet att studera elevers förståelse för variabelbegreppet. Nackdelen med att studera elevers förståelse för variabelbegreppet med endast en uppgift är att de kanske har svårt för just den typen av uppgift och därmed ges en felaktig bild av förståelsen. Jag har däremot valt att studera elevers förståelse för variabelbegreppet i en uppgift som innebär att hitta mönster. Elever i gymnasiet borde dessutom ha stött på problem som handlar om att hittar mönster i grundskolan enligt kursplanerna (Lpo 94). Uppgiftens generella lösning innebär att hitta tre olika mönster. Det finns olika svårighetsgrader i de olika mönstren vilket kan öka elevernas möjligheter ytterligare. Om eleven inte klarar av att lösa uppgift d) kommer jag att dra slutsatsen att eleven ha svårigheter med variabelbegreppet.

Tidigare undersökningar har gjorts med problemet med *stenplattorna* (Taflin, 2007). Då har fokus varit på hur lärare kan få in de rika matematiska problemen i undervisningen. Jag har däremot valt att rikta in mig på hur elever uppfattar variabelbegreppet och kommer fram till den generella lösningsmetoden.

3.2 Urval

Undersökningen genomfördes på en gymnasieskola i en mellanstor stad i södra Sverige. Sex elever i årskurs ett på hantverksprogrammet intervjuades. Eleverna har utfört grundskolans matematik med minst godkänt i betyg och har påbörjat första kursen i matematik på gymnasienivå.

Genom tidigare praktik har kontakt med eleverna skett och eleverna är därmed bekanta med mig. Klassen valdes ut strategiskt då de ska lösa en matematikuppgift samtidigt som de får frågor och kan uppleva en viss press. Är de bekanta med intervjuaren kan de känna sig tryggare under intervjuerna.

Klassen fick information om att en undersökning skulle genomföras, dock ej vad för typ av undersökning. De fick själva avgöra om de ville vara med i undersökningen och sedan slumpades sex elever ut av dessa.

3.3 Pilotstudie

Innan intervjuerna påbörjades gjordes en pilotintervju på en elev. Orsaken till att göra en pilotstudie var att jag då fick möjligheten att öva på min intervjuteknik.

Under pilotstudien upptäckte jag flera saker som kunde förbättra intervjun:

- Eleven får innan intervjun läsa uppgiften själv i lugn och ro.
- Eleven får skriva färdigt var deluppgift innan jag ställer frågor.
- Viktigt att vara noggrann med att informera om att tiden inte spelar någon roll.
- Markera att fokus ligger på att förstå tillvägagångssättet och inte det rätta svaret.

3.4 Genomförande

Denscome (1998) skulle kalla den här typen av intervju för en ostrukturerad intervju. Här är forskaren involverad så lite som möjligt och den intervjuade personen tillåts prata och utveckla sina idéer.

Intervjuerna skedde i en lugn miljö och genomfördes under matematiklektioner. Samtalen skedde i ett enskilt rum och spelades in, efter samtycke från eleven, samtidigt som stödanteckningar gjordes. Eleverna skrev ner sina lösningar på ett papper och jag ställde, vid behov, frågor om hur eleven hade kommit fram till vissa slutsatser. Varje elev fick en öppen matematisk fråga som de skulle lösa. En öppen matematisk fråga är som tidigare nämnt en uppgift som alla kan ta sig an på något sätt. Därför bedömde jag att alla elever var kapabla att visa på något. De skulle under tidens gång förklara för mig hur de tänkt och kommit fram till de olika svaren. Jag informerade eleverna om att det endast var jag som kom att ha tillgång till råmaterialet och att de i forskningen skulle vara anonyma. Jag poängterade även att det inte var svaret som var viktigt utan tillvägagångssättet. Efter var eller varannan intervju gjordes transkriptioner av vad de sagt, kopplat till vad de hade antecknat. Det var viktigt att sammanfatta intervjuerna så snart som möjligt på grund av risken att glömma väsentliga delar.

3.5 Resultat

I första delen av resultaten behandlas elevernas tillvägagångssätt för att lösa uppgiften. Uppgift a), b) och c) tas upp först och uppgift d) tas upp under en enskild rubrik där även variabelbegreppet hanteras. Huvudsyftet med uppgiften är att se hur eleverna hanterar variabelbegreppet. Där är därför även viktigt att ta upp olika tillvägagångssätt eleverna använde sig av för att slutligen kunna göra en generalisering. För att underlätta läsningen numreras eleverna 1 till 5.

3.5.1 Lösning utav uppgift a), b) och c)

I uppgift a) ska eleven bestämma hur många stenplattor det går åt i figur nummer 5 (Bilaga). De skulle även bestämma antalet ljusa och antalet mörka plattor. I uppgift b) och c) skulle de bestämma samma sak för figur 15 respektive figur 100.

Det var inga svårigheter för eleverna att hitta antalet plattor för figur nummer fem. Elev 3 valde att rita upp figuren för att sedan räkna ut hur många plattor som var svarta respektive ljusa. De andra fyra såg ett mönster direkt, ett typexempel från elev 4:

> Men det är plus två hela tiden. Men då ska det vara 5 plus 2 alltså 7 gånger 7 då är det 49 stycken totalt.

Det totala antalet plattor för figur 15 och figur 100 räknades ut med samma metod. För elev 3, som använt metoden att rita upp figurerna, tog det stopp vid figur 100 då detta ansågs för besvärligt. Elevernas tillvägagångssätt skilde sig åt då antalet ljusa och antalet mörka plattor skulle beräknas. Någon såg mönstret för de ljusa direkt ($5\cdot5$, $15\cdot15$ och $100\cdot100$) och en annan hittade ett mönster för antalet mörka plattor ($6\cdot4$, $16\cdot4$ och $101\cdot4$). Elev 3 uttryckte tidigt att beräkningar med *n* skulle göra på något sätt. Därigenom visade sig en bekantskap för liknande uppgifter, däremot uttryckte eleven sig aningen förvirrat:

> Det var något med n, man skulle gånga det med fem eller vad det var för n var alltid x, men jag lyssnade aldrig på det.

3.5.2 Lösning utav uppgift d)

Alla elever försökte sig mer eller mindre på uppgift d) där de skulle ta reda på hur många plattor totalt, antal mörka samt antal ljusa det fanns i *n*:te figuren. Det tre elever visade gemensamt var att de blev osäkra på hur de skulle hantera *n*. De visade sin osäkerhet genom att ställa frågor om *n* som bland annat rörde dess betydelse:

> E1: Alltså ska jag göra en ekvation av det? Så man ska kunna sätta in vilket tal som helst i n så ska det stämma då?

E3: Det var någonting, man skulle gånga det sen skulle man… Jag kommer inte på det. *N* var ju vilken figur som helst, det fick man väl välja själv. Man kunde tillexempel ta *n* gånger den femte figuren om man ville det. Eller?
E5: … och *n* kan då vara vad som helst?

Tre av eleverna blandade dessutom in bokstaven *x* i resonemanget. I tidigare avsnitt syns hur elev 3 blandade in *x*. Elev 5 ersatte *n*:et med ett *x* rakt igenom och kom fram till ett rätt svar, däremot uttryckte eleven osäkerhet om *x*:ets betydelse som visade på att denne inte helt förstått innebörden av variabelbegreppet. Konversationen som fördes mellan elev 5 och intervjuaren (I) ses nedan:

E5: Alltså det är *x* upphöjt till två eller något (funderar). Jag kan inte d)!
I: Om du skulle försöka? Förstår du vad som menas med uppgiften?
E5: Ja alltså nej. Nej.
I: Du ska hitta ett slags mönster.
E5: Mm och *n* kan då vara vad som helst?
I: Ja
E5: Hm… (Eleven skriver på pappret). Jag vet inte.
I: Hur funderar du?
E5: Alltså man vet ju att det ska vara två till alltså över men jag vet inte hur jag ska beskriva det i sådan (syftar till en formel).
I: Men om du hade fått använda *x*?
E5: Om *x* hade varit en sida så hade man kunnat ta *x* upphöjt med två för att få alla. Och *x* gånger fyra minus fyra så hade det varit de runt om (de mörka). Men jag vet inte. Ska jag skriva då att *x* är en sida eller?

Då eleven beräknar det totala antalet plattor och antalet mörka plattor kopplas *x* till hur många plattor det finns på en sida och inte till figurnumret. Elev 1 fann mönstret snabbt och löste därmed uppgift a)-c) väldigt snabbt. Då elev 1 skulle hitta en generell lösningsmetod visade sig en brist i förståelsen för hur variabeln *n* skulle användas. Eleven försökte finna ett mönster för figur nummer 20 för att sedan koppla det till *n:*

Jag förstår inte riktigt. Så jag ska göra en ekvation av det? Hmm… Måste jag skriva n=20? Räcker det att jag skriver n då?

Eleven fortsatte genom att göra kopplingar till de figurer som redan var uträknade i tidigare uppgifter:

5n är lika med 25 då är det för de ljusa. Men om det typ skulle varit figur 6 istället då blir det ju olika siffror beroende på vilken figur det är. Tar man figur 6 blir det ju 6*6 och figur fem så blir det 5*5 på det ljusa alltså. Men jag fattar inte det här då med *n*:te figuren.

Elev 1 klarade inte av att fortsätta och saknar alltså förståelse för hur *n* ska användas. Eleven fortsatte att prova sig fram genom att använda sig av *n* men försökte även att få in *x* på något vis:

$x \cdot x = n$

eller

$n \cdot n = x$

$7 \cdot 7 = x$

$x = 49$

En viss frustration observerades då eleven inte kom längre än såhär. Observera att *n* inte står för figurnumret här.

Två av eleverna kom fram till en lösning genom att använda sig av *n*. De båda hittade uttryck som visade det totala antalet plattor, antalet ljusa plattor och antalet mörka plattor. Det var däremot inte alla uttryck som förenklades. Följande visar hur elev 2 kom fram till en generell lösningsmetod:

> Om det är figur 1 då tar du numret då 1 och sen plus 2 och gångar det med varandra, eftersom det börjar med tre stycken i rad istället för en. Och sen gör du samma sak i figur 2 och 3 osv. alltså gångar för att få fram antalet i *n*:te figuren. Och de mörka, då var det de i omkretsen så att säga. Just för att man inte ska få hörnorna två gånger så blir det figurens antal plus 1 och sen gånger 4. Och de ljusa då tar man det totala minus de mörka.

Elev 1 antecknar följande:

$$(n+2)(n+2)-(n+1)\cdot 4 = ljusa$$

(totalt antal) – (antal mörka) = (antal ljusa)

Eleven förklarar hur formeln har tagits fram och visar en förståelse för den generella lösningen. Även elev 4 kom fram till en generell lösningsmetod utan några större problem:

> E4: De ljusa, då blir det numret gånger numret. Alltså numret upphöjt till två. För att räkna ut hela så var det numret plus två och det var också upphöjt till 2. Då får man ta basen gånger höjden. Då tar jag detta (det totala) minus de ljusa så får jag ju de mörka. Jag tror jag förstår. Var vi färdiga med den?
> I: Känner du dig färdig?
> E4: Ja

Elevens slutliga formel ser ut som följande:

$$Hela: (n+2)^2$$

$$Ljusa: n^2$$

$$Mörka: (n+2)^2 - n^2$$

Även här tar en elev hjälp av två funna formler för att finna den tredje.

3.5.3 Slutsatser

Slutsatsen kan dras att alla hade den matematiska förmågan att ta sig an problemet. Eleverna hade arbetat med det algebraiska språket tidigare men en viss ovana visade sig. En vilja fanns att använda sig utav *x* istället för *n* hos tre av eleverna, vilket dessvärre inte ledde till en generell lösningsmetod. Endast två av de fem eleverna klarade uppgiften fullständigt och de visade därmed en förståelse för variabelbegreppet. De tre eleverna som inte klarade att lösa uppgift d) visade en osäkerhet vid användning av variabeln *n*. De två elever som löste uppgiften fullständigt såg mönstret i två av formlerna och använde sedan dessa för att lösa ut den tredje formeln.

4 Diskussion

I diskussionsdelen kommer kopplingar göras mellan resultatet av den empiriska studien och litteraturgenomgången. Avsnittet avslutas med en metoddiskussion.

4.1 Problemlösning

Jag uppfattade det som att eleverna i min studie tog det som en utmaning då de inte gav upp i första taget. Tack vare att uppgiften var en problemlösningstyp enligt Haglands m.fl. (2005) kriterier var den anpassad så att den kunde påbörjas av alla elever. Elever med erfarenhet har enligt Lester m.fl. (2006) mer självtillit och de ser problemlösning som en utmaning. En viss frustration från elev 1 dök upp då denne fastnade och inte kom längre i uppgiften vilket kan bero på att uppgiften blev för abstrakt i slutet. Uppfattas en uppgift som abstrakt kan det enligt Bergsten m.fl. (1997) påverka motivationen negativt. Likaså visar skolverkets rapport (2003), att motiveringen finns där när eleven förstår varför den ska kunna lösa en specifik uppgift. Det kan vara så att det för elev 3, som slutade vid figur 15, inte räckte med ett forskningssyfte som motivation då den egna motivationen antagligen saknades. Eleven hade varit tvungen att byta metod för att kunna fortsätta med uppgiften, vilket kan ha setts som för ansträngande.

I kursplanerna markeras det att problemlösning är en viktig del i skolans matematik. Att det logiska tänkandet ökar och den matematiska förmågan utvecklas stöds av bland annat Hagland m.fl. (2005), Mouwitz m.fl. (2003), Lester m.fl., (2006) och Bergsten m.fl. (1997). Det var tre elever som kom lite längre än de andra, vilket kan visa på att de arbetat mycket med problemlösning tidigare. Enligt skolverkets rapport (2003) är problemlösning och generalisering en bra inledning till att få grepp om variabelbegreppet och är därför en viktig del i förståelsen.

4.3 Variabelbegreppet

Två elever använde sig av x istället för n då de skulle försöka få fram den generella lösningsmetoden. Enligt Radford m.fl. (2005) är de vana vid att använda sig av symbolen x och kunde därmed inte byta till symbolen n. Elev 5 lyckades komma fram till rätt lösning men kopplade x till en sida i kvadraten istället för till figurnumret. Där kan brister ha funnits i mellan det matematiska språket och vardagsspråket (Riesbeck, 2000). Eleven hade problem med att göra en tolkning av uttrycket vilket innebär brister i den tredje fasen i algebraiska cykeln (Bergsten m.fl., 1997). Elev 1 ställde upp ett uttryck som blev lika med x och räknade sedan ut *x*. Eleven använde *x*:et som en parameter och något som skulle lösas ut, vilket enligt Radford m.fl. är vanligt för oerfarna elever. Eleven förstod inte att det obekanta kan variera och stå för olika värden, vilket antyder att eleven saknar förståelse för variabelbegreppet. Kopplas det till den algebraiska cykeln förstår man att eleven hade problem med den första fasen *översättning* (Bergsten m.fl., 1997).

Elev 3 ville påbörja uppgiften direkt med att tillämpa en obekant. Eleven trodde att man skulle lösa uppgiften på ett specifikt sätt. Uttalandet antydde att eleven hade fått för sig att det skulle finnas ett specifikt sätt att lösa uppgifter som handlade om att hitta mönster. Det kan ha varit så att eleven har fått mycket traditionell undervisning, enligt vad Mouwitz m.fl. (2003) menar, där det redan finns förutbestämt hur en uppgift ska lösas. Eleven ville göra rätt för sig och försökte då minnas vad den ”rätta” metoden var. Tall (2005) markerar att en elev måste ha förståelse för den konkreta matematiken innan den kan handskas med symbolspråket. De två elever (elev 1 och elev 3) som inte lyckades tillämpa den abstrakta matematiken hade antagligen brister i den konkreta matematiken. De saknade förståelse för variabelbegreppet. En annan slutsats som kan dras här är att läraren på elevens tidigare grundskola inte arbetat med problemlösning i den grad som krävs för att lösa denna typ av uppgift.

Det var två elever som klarade av att lösa uppgiften fullständigt och verkar därmed ha en förståelse för betydelsen av en variabel. De visade inte på några svårigheter vid den generella lösningsmetoden. Enligt Bergsten m.fl. (1997) och skolverkets rapport (2003) torde det vara så att dessa elever har fått mycket övning i att generalisera.

4.4 Metoddiskussion

Då undersökningen genomfördes poängterade jag noggrant att de skulle ta den tid det tog för uppgiften. Däremot kan det ha uppkommit stress på grund av att de visste när matematiklektionen var slut. Fokus kan då enligt Möllehed (2001) ha legat på att lösa uppgiften så fort som möjligt vilket kan ha bidragit till att eleven gett upp.

För att öka validiteten hade en större undersökning behövts. En liknande kvantitativ undersökning hade kunnat genomföras, däremot hade man missat elevernas frågor om uppgiften och kanske en viss oklarhet hade dykt upp angående elevens tillvägagångssätt. I och med att en kvalitativ intervjustudie genomfördes, kunde frågor om tillvägagångssätt utredas.

4.5 Pedagogiska konsekvenser

Skolor skulle behöva arbeta mycket med ett problemlösande arbetssätt. Eleven får då tillfälle att öva sig i att lösa problemuppgifter där olika lösningsmetoder finns och där lösningsmetoden inte är förutbestämd. Inför kommande läsår kan det vara bra för grundskolelärare att fundera över hur en ökad förståelse för variabelbegreppet kan nås. Undersökningen visar att det finns brister i förståelsen och därmed måste något göras annorlunda. Det skulle vara intressant att följa upp med en undersökning nästkommande läsår för att se om elevernas förståelse för variabelbegreppet har ökat då det tydligt står med i kursplanen.

5 Sammanfattning

Syftet med arbetet var att ta reda på elevers förståelse för variabelbegreppet vid en uppgift som innebar att hitta ett mönster. Syftet var även att ta reda på vad eventuella svårigheter beror på.

Jag intervjuade fem stycken elever som läste Matematik A på gymnasiet för att undersöka hur de tog sig an variabelbegreppet. Den empiriska undersökningen visar att drygt hälften av eleverna har brister i denna förståelse då de kommer från högstadiet. Svårigheterna ligger i att de inte vet hur de ska angripa problemet och använda sig av variabeln n. En elev visar att förståelsen för variabelbegreppet saknas då denne använder sig av en obekant som ett värde som ska lösas ut. Slutsatserna som dras är att de elever som inte klarade uppgiften fullständigt saknar vana att arbeta med problemlösning och generalisering.

Tidiga kursplaner markerar vikten i att eleven måste ha nått en viss mognad för att ta till sig den abstrakta matematiken. I den närmsta framtiden ska vi anta att alla elever har nått denna mognad i slutet av grundskolan.

Referenser

Bergsten, C., Häggström, J., Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Nämnaren TEMA.

Björkqvist, O. (2001). Matematisk problemlösning. *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv.* Grevholm (red). Studentlitteratur, Lund.

Denscombe, M. (1998). *Forskningshandboken – för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna.* Lund: Studentlitteratur.

Hagland, K., Hedrén, R., Taflin, E. (2005). *Rika matematiska problem – inspiration till variation* Liber AB.

Holmström, M., Smedhamre, E. (2000). *Matematik från A till E – Matematik A för gymnasieskolan*. Liber AB

Johansson, B. G. (2004). *Matematikens historia.* Studentlitteratur, Lund.

Lester, F., Lambdin, D. (2006). Undervisa genom problemlösning. I Boesen, J. (red). *Lära och undervisa matematik – internationella perspektiv*

Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet Lgr 62. (1962). Stockholm: Utbildningsförlaget.

Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet Lgr 80. (1980). Stockholm: Utbildningsförlaget.

Läroplaner för det obligatoriska skolväsendet Lpo 94. (2000). Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011. (2011). Stockholm.

Mouwitz, L., Emanuelsson G., Johansson B. (2003) *Baskunnande i matematik.* Myndigheten för skolutveckling.

Möllehed, E. (2001). *Problemlösning i matematik.* Institutionen för pedagogik. Malmö.

Normalplan för undervisningen i folkskolor och småskolor. (1878) Stockholm: P.A. Nordstedt & söner.

Radford, L., Sabena, C., Bardini, C. (2005). Struggling with variables, parameters, and indeterminate objects or how to go insane in mathematics. I *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, ss. 129-136). Melbourne, Australia.

Riesbeck, E. (2000). *Interaktion och problemlösning.* Linköping universitet.

SAOL13 (2006), Svenska Akademiens ordlista över svenska språket (13: e uppl.): Nordstedts Ordbok.

Sjöberg, B. (2001). *Från Euklides till Hilbert – Historien om matematikens utveckling under tvåtusen år.* Åbo: Åbo Akademis förlag.

Skolverket. (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik.* Örebro: Fritzes.

Svenska skrivregler (2008), Svenska Språknämnden. Stockholm: Liber.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan – för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå, Sverige.

Tall, D. (2005). *The transition from embodied thought experiment and symbolic manipulation to formal proof.* Plenary Lecture for the Delta Conference, Frazer Island, Australia, November 2005.

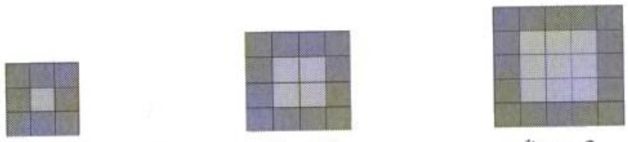
Thompson, J. (1996). *Matematiken i historien.* Studentlitteratur, Lund.

Vetenskapsrådet. (2002) *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Bilaga, Stenplattor

Stenplattor

Ett mönster läggs med hjälp av kvadratiska stenplattor, mörka och ljusa. Så här ser mönstret ut:



figur 1 figur 2 figur 3

a) Hur många plattor går det åt till figur 5? Hur många av dem är ljusa och hur många är mörka?

b) Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur 15?

c) Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur 100?

d) Hur många mörka respektive ljusa plattor går det åt till figur n? Hur många plattor går det åt totalt till figur n?