HÖGSKOLAN KRISTIANSTAD

EXAMENSARBETE

Hösten 2007

Lärarutbildningen

Infinitesimalkalkyl

Gymnasieelevers förståelse av derivata

Författare

Mihaela Jonasson

Ulrika Selinder

Handledare

Kristina Juter

www.hkr.se

Infinitesimalkalkyl
Gymnasieelevers förståelse av derivata

Abstract

Förstår dagens gymnasielever innebörden av derivata och ser de kopplingen till sin vardag? Författarnas egna erfarenheter från egna studier och verksamhetsförlagda delar av lärarutbildningen samt internationell forskning, visar att gymnasieelever har svårt att se kopplingen mellan begreppet derivata och sin vardag. Syftet med uppsatsen är att undersöka om dagens elever har den relationella förståelse som styrdokumenten kräver, samt att undersöka vilka svårigheterna är och möjliga orsaker till detta. Undersökningen har varit av kvalitativ art. Enkäter har blivit utdelade och analyserade. Resultatet av elevenkäten visar på brister i förståelse och att eleverna saknar delar av grundkunskaperna som krävs för förståelse av begreppet derivata. Analysen visar att eleverna som anses kunna matematik oftast enbart har instrumentell förståelse till ämnet och ingen relationell förståelse, vilket innebär att elevernas kopplingar mellan den teoretiska matematiken och verkligheten de lever i nästan är obefintlig.

Ämnesord: matematikundervisning, derivata, derivering, infinitesimalkalkyl, differentialkalkyl, analys, förändringskvot, gymnasieelever.

INNEHÅLL

Figurförteckning

1 Inledning med bakgrund och syfte

Matematik är ett av skolans tre kärnämnen och därmed ett av skolans viktigaste ämnen. Lyckligtvis diskuteras idag elevernas allt sämre matematikkunskaper samt deras vikande intresse för matematik. Vad är det som gör att eleverna inte vill läsa matematik? Kan de inte se nyttan av matematiken och därmed sjunker motivationen att läsa matematik eller? Det här området är stort och därmed svårhanterligt, vilket fick oss att börja funderade på hur vi skulle kunna begränsa vad som annars skulle kunna bli ett arbete av enorma proportioner. Vår nyfikenhet var nu väckt för om eleverna upplever matematikundervisningen som relevant, eftersom våra egna erfarenheter, från vår egen skolgång och våra perioder med Vfu – Verksamhetsförlagd utbildning, är att matematikundervisningen ofta är väldigt abstrakt och svårhanterlig för de flesta på gymnasiets Ma C-kurser. De kan oftast inte förstå vad de lär sig utan de lär sig enbart att tillämpa formler, men vad dessa betyder och används till har de ringa kunskaper i. Detta får till följd att de inte kan koppla kunskapen till vardagen, trots att ett av målen för gymnasieskolan är att eleverna efter gymnasiet ” kan formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för yrkes- och vardagsliv” enligt Lpf 94 (1994 års läroplan för de frivilliga skolformerna) (Lärarboken, s. 49). Eller som det preciseras i kursplanen för matematik: ”Förståelse, analys av hela lösningsprocedurer och kritisk granskning av resultat samt förmåga att dra slutsatser är grundläggande i gymnasieskolans matematikämne.” (Skolverket, 2000c).

Vi valde då att fokusera på om de elever som väljer att läsa vidare med Ma C anser att de har någon nytta av att kunna derivera och om de kan se kopplingen mellan skolmatematiken och sin egen vardag och om de har förstått innebörden av derivering. Vi vill undersöka detta eftersom vi anser att elevernas motivation blir högre om de ser en praktisk nytta av att lära sig det. Vi har även funnit en internationell undersökning gjord av Skolverket 1998 som visar att svenska elever i genomsnitt presterar sämre än det internationella genomsnittet inom området för derivator och integraler (TIMSS rapport 145). Vi vill även göra detta för att se om vi kan hitta några samband mellan undervisningssätt, svårigheter med derivata och elevernas förståelse av derivata.

Vi är intresserade av detta för är vi vill vara förberedda på vilka svårigheter som kan komma och vilka orsakerna till dessa är, eftersom vi då bör kunna presentera derivata på ett bättre sätt när vi undervisar i ämnet för att undvika att gå i samma fällor och bara lära ut hur man använder formlerna. Vi vill även bli bättre på att anpassa vår undervisning så att de ser kopplingen till vardagen för att på så sätt öka motivationen för matematiska studier. Derivatan är av central betydelse för studier inom matematik på högre nivå.

2 Forskningsbakgrund

2.1 Disposition

Här följer nu ett avsnitt som inleds med metodval och vår teoretiska utgångspunkt. Detta följs sedan av en kort beskrivning av derivatans historia, innebörd, användningsområden och vad som krävs för att förstå derivata. Vi kommer också att titta på vilka krav styrdokumenten ställer på elevernas kunskap inom området för derivata. Vidare kommer vi att presentera en lärobok som var vanlig för några år sedan, samt de läroböcker som eleverna i undersökningen använde i Ma C för att se hur mycket eller lite fokus som läggs på verklighetsförankringen och förståelsen av derivatan. För att ytterligare se hur förankrad undervisningen är i vardagen så kommer vi att presentera en fallstudie av lärares upplägg vid introduktionen av derivata som begrepp. Därefter följer en omfattande presentation av för området relevant forskning, vilken är bearbetad och sammanställd för att finna så många möjliga orsaker som möjligt till elevernas svårigheter med att förstå derivata och för att finna orsakerna till att de har svårt att se kopplingen mellan skolmatematiken och vardagen. Vilket har fått till följd att vi har en relativt stor sammanställning av senare års forskning som berör elevers svårigheter och förståelse av matematik.

2.2 Metod

Vi valde deskription och teoribildning som metod för litteraturavsnittet. Enligt Ejvegård (2003) används deskription för att beskriva något och teoribildning i sin tur beskriver hur olika delar hänger samman. Litteraturavsnittet inleddes med en deskription av vad derivatan är och vad den används till samt en kort beskrivning av hur undervisningen ser ut idag. Därefter följer det Ejvegård kallar teoribildning där vi presenterar tidigare forskning på området. Då vi först började leta efter relevant litteratur fann vi inte mycket men helt plötsligt när vi väl hade hittat två fick vi en ”ketchupeffekt” – först inget och sedan allt på en gång. Vi genomförde sökningar på universitetsbibliotekens hemsidor, Libris, Diva, Google samt andra sökmotorer på nätet. Sökorden var derivata, derivering, differentialkalkyl, analys och motsvarande engelska begrepp samt grammatiska varianter av dessa. Vi fann hur mycket litteratur som helst. Eftersom vår tid var begränsad valde vi ut litteratur som fokuserade på elevernas förståelse och deras svårigheter med att förstå derivata.

Mycket av den litteratur vi fann var på engelska vilket innebär att vi har fått ytterligare ett tolkningsförfarande som kan ha påverkat objektiviteten i presentationen. Det bedrivs ingen, av oss känd, forskning i Sverige idag inom området för vilka metoder som används eller vilka som är mest lämpliga att använda i undervisningen om derivata. Däremot bedrivs forskning kopplad till derivata. Derivata verkar vara ett stort och brett forskningsområde utomlands, vilket gör att det finns mer utländsk litteratur än svensk.

Egentligen är de senaste årens forskningsrapporter ett tillräckligt stort underlag till vårt examensarbete, för precis som Ejvegård (2003) skriver så är en forskningsöversikt tillräcklig för en uppsats, eftersom ny forskning bedrivs hela tiden inom specifika områden och mer på djupet än tidigare, vilket innebär att helhetsbilden går förlorad. Det är denna helhetsbild som en ren forskningsöversikt skulle kunna bidra med, men då vi även ville se om de kunde se kopplingen till sin vardag har vi även gjort en empirisk undersökning.

2.3 Teoretisk utgångspunkt

De pedagogiska synsätt som ligger till grund för hur man förstår matematik är flera och kan beskrivas på olika sätt. Eftersom vi fokuserar på elevernas förståelse av matematiken och fram för allt inom området för derivata, kommer vi här att presentera vår syn med hjälp av andra forskare, vilka använder lite olika begrepp för samma innebörd. Vi väljer att i kommande avsnitt använda oss av Skemps uttryck, relationell och instrumentell förståelse, eftersom det är begrepp som är lätta att förstå och samtidigt beskriver de två huvuddragen för hur man kan förstå matematik.

För att kunna förstå vilket matematiskt begrepp som helst behöver människor en organiserad struktur av kunskaper, i vilken nya kunskaper och erfarenheter passar in. Detta kräver en hög mental funktion, en individuell förmåga att kategorisera saker i världen. Kategoriseringen involverar en samling av hierarkiska relationer som kan sättas in i ett system – en begreppsbild.

Davis och Tall (2002) har definierat begreppsbilder, som ett schema som består av en sekvens av olika handlingar och objekt inom ett avgränsat område. Mer avancerade begrepp kräver då en högre kategorisering av lägre begreppsbilder. För att ytterligare klargöra hur begreppsbilderna hör ihop introducerar Zandieh (2000) en ny term, process-objektpar. Dessa process-objektpar består av flera begreppsbilder som tillsammans beskriver både processen och objektet i fråga.

2.3.1 Allmän förståelse av matematik

Enligt Skemp (1978) finns det två helt olika sätt att se på begreppet ”förståelse” när det gäller matematik, relationell och instrumentell. En relationell förståelse innebär att man vet vad man skall göra och varför man gör det, medan en instrumentell inte är en förståelse i egentlig mening, utan man bara använder ”rules without reasons” (Skemp, 1978, s. 2) (regler utan anledning). Enligt Skemp lär de flesta lärare och elever sig att använda reglerna utan förmåga att riktigt förstå reglerna och se kopplingen till verkligheten. Han menar att det finns vissa fördelar med instrumentell förståelse av matematiken. Kunskapen bygger då på ett antal låsta och fasta vägar för att nå en lösning på ett problem. Detta innebär en strategi där man steg för steg, där det ena steget bestämmer vad det andra ska vara, kommer fram till en lösning och ju fler steg man kan ta desto större matematikkunskap har man. Detta stämmer väl överens med det som oftast krävs av eleverna, vilket är ett papper med de rätta svaren på, eftersom att få rätt på prov höjer elevernas självkänsla.

Relationell matematik däremot har andra fördelar som till exempel; den är lättare att anpassa till nya arbetsuppgifter, den är lättare att komma ihåg när man väl har förstått hur allting hänger ihop. Den relationella kunskapen karakteriseras av att man har flera olika begreppsstrukturer som ger möjlighet att konstruera flera olika lösningar för att med framgång komma fram till ett problems lösning (Skemp, 1978).

Vissa lärare tycker att relationell förståelse tar alldeles för långt tid att åstadkomma och att den är för svår eftersom informationen då är för koncentrerad – en enda rad kan innehålla information som annars skulle ha skrivits i flera stycken (Skemp, 1978).

Löwing (2004) säger att skolan ska ge eleverna en abstrakt och koncentrerad kunskap vilken ofta är skild från verkligheten de lever i. De menar vidare att tankemodeller förvärvade i en situation inte enkelt överförs och kan utnyttjas i en annan situation. Eleverna måste få hjälp att generalisera och förstå hur de ska kunna utnyttja kunskapen i andra situationer. Här menar Löwing att lärarnas språk och förmåga att koppla matematikundervisningen till vardagen är helt avgörande för om eleverna ska kunna koppla ihop skolmatematiken med vardagen.

Gardner (1992) har nämligen funnit att om inte problemen i matematiken formuleras på samma sätt som de exempel som gåtts igenom så klarar inte eleverna av att lösa dem. Han menar att detta visar att eleverna inte har förstått innebörden utan bara klarar av att använda formeln/algoritmen för stereotypfall. Enligt Skemp (1978) har eleverna då bara uppnått den instrumentella förståelsen.

Gardner (1992) anser vidare att en av stötestenarna är att, i matematiken är ordens betydelse exakt, det finns ingen frihet för tolkning utan du måste exakt förstå innebörden av den skrivna texten. Eleverna har alltså lättare för att lösa problem där ordföljden följer algoritmens utseende och de enbart kan stoppa in siffra efter siffra på rätt ställe och få ut svaret.

Gardner (1992) menar att vi måste förstå med kroppen och sinnena att ett fenomen/situation existerar och fungerar innan vi kan sätta den matematiska algoritmen i händerna på eleverna, för då har de en intuitiv förståelse för vad det är de ska räkna med. Alltså utforska först, följt av en grafisk representation och först därefter en algoritm. För även om eleverna då glömmer den exakta algoritmen så har de förståelsen kvar. Han menar då att fler utforskande aktiviteter och lärare som uppvisar förståelse leder till en djupare förståelse hos eleverna. För att vi ska få effektivt lärande hos eleverna på sikt säger Gardner att det krävs: ”en utbildning som ger större förståelse hos eleverna som resultat.”(s. 152)

2.3.2 Förståelse av derivata

Zandieh (2000), har undersökt 9 elever om vad deras förståelse av derivatan beror på. Med tanke på att derivatan kan beskrivas på flera olika sätt, till exempel symboliskt, grafiskt, numeriskt, fysikaliskt, osv. introducerade hon en ny term, process-objektpar, för att klargöra hur begreppsbilderna hör ihop. Derivatan omfattar de matematiska begreppen; bråk, gränsvärde och funktion. Alla de här tre begreppen kan behandlas som både en dynamisk process och ett statiskt objekt. Till exempel är en funktion en process genom vilken man väljer ett element från definitionsmängden och producerar ett element i värdemängden. Statiskt sett är en funktion en mängd av ordnade par. Derivatan omfattar således tre process-objektpar vilka är sammanbundna i en kedja. Till exempel, om vi studerar den grafiska derivatan så har vi först lutningen hos en linje mellan två punkter på kurvan som beskriver funktionen i frågan. Linjen som sammanbinder de två punkterna refereras ofta som en sekant. Objektet är själva lutningen och processen är beräkningen av lutningen, vilken är förändringen i y-led dividerat med förändringen i x-led (rise over run).

I andra process-objektparet handlar det om gränsvärdet av en sekvens av olika värde på lutningen. De här värdena på lutningen kan tänkas som lutningen av flera sekanter som går genom en gemensam punkt. Vi ser att den andra punkten som definierar sekanten, närmar sig den gemensamma punkten. Sekanten närmar sig tangenten i den gemensamma punkten. Detta är en gränsvärdesprocess och objektet består av tangentens lutning i den gemensamma punkten.

Det tredje paret består av funktionsprocessen som går genom varje punkt av funktionens kurva och beräknar slumpmässiga lutningsvärde. Objektet är derivatan, vilkens graf kan ses som en kurva i sig.

Förståelsen av derivatan ligger i interaktionen mellan de tre process-objektparen och i varje begrepp för sig. De flesta elever använder sig av en pseudo-objekt förståelse, detta betyder att eleverna utvecklar en intuitiv, partiell förståelse som inte baseras på enskild förståelse av de olika delarna, de bakomliggande processerna eller helheten. Till exempel kan de hantera en funktion genom att se en graf eller ett symboliskt uttryck utan att veta dess definitionsmängd, värdemängd och förhållandet mellan dem. Elever kan använda pseudo-objekt paren som en ren instrumentell förståelse där det samtidigt inte finns något behov av att referera till underliggande processer i sammanhanget som de arbetar i. Lärarnas ambition är att ge eleverna en komplett förståelse av alla tre process-objekt paren som är involverade i derivatabegreppet. En svårighet för lärarna är att de flesta problem som involverar derivata går att lösa genom att bara använda pseudo-objekt förståelsen. En annan svårighet är att eleverna inte kan se sambandet mellan olika sammanhang där man kan använda sig av samma process. Eleverna måste lära sig att känna igen likheterna för processen i varje sammanhang för att kunna dra paralleller mellan problemen. En elev har inte en komplett förståelse av derivatan om hon/han inte känner igen och kan använda varje enskild process av de tre som är inblandade i förståelsen av derivatabegreppet (Zandieh, 2000).

2.4 Vad är derivatan?

Här följer en kort historisk beskrivning, innebörden, användningsområden och definitionen av derivata utifrån Lund (2002), Stewart (2003) och Thompson (1991).

2.4.1 Derivatans historia, innebörd och användningsområden

De grundläggande idéerna kan spåras ända tillbaka till antikens grekland. Grunden i infinitesimalkalkylen är begreppet ”tangent” som först blev definierad av de klassiska grekiska matematikerna. Grekerna har definierat tangenten, som en rät linje, vilken vidrör en cirkel i en punkt utan att skära den. För att de antika grekiska matematikerna skulle godkänna en rät linje som en tangent till kurvan fick den räta linjen:

1) enbart ha en gemensam punkt med kurvan
2) inte ha andra punkter gemensamma med kurvan

Utifrån villkoren 1) och 2) kunde grekerna sedan konstruera en tangent med hjälp av en rät linje. Detta löstes geometrisk med ord och bilder utan att de använde något symbolspråk. Varje enkel kurva krävde sin egen tangentkonstruktion, som byggde på just den kurvans speciella egenskaper.

Descartes (1596-1650), visade att en linje genom en punkt på en kurva är en tangent genom att bestämma en normal till linjen i punkten. Funktionsbegreppet var inte utvecklat på det sätt som vi använder det idag utan allting förklarades med hjälp av kurvor. Descartes normal-metod är besvärlig och den fungerar bäst på enkla kurvor, eftersom han endast undersökte fall där kurvan är representerad av ett polynom. Han förklarade metoden genom ett slags gränsvärdestänkande (vad som menas med två storheter som ”närmar sig varandra”).

Fermat (1601-1665) beskriver i sin avhandling året 1629, som skrevs på latin - de lärdes internationella språk, en metod för att bestämma maxima och minima av en kurva. Han antyder att tangentmetoden bara är ett specialfall av maximum-minimum-metoden.

Leibniz (1646-1716) lade grunden för differentialkalkylen. Han föreställde sig att kurvor var sammansatta av en oändlig mängd med oändligt små linjestycken. Dessa linjestycken motsvarar en följd av tätt liggande värden (punkter) som genomlöps av både x och y i ett koordinatsystem. Det var Leibniz som introducerade symbolerna dx och dy för differentialerna och derivatvärdet som kvoten mellan dessa, df/dx.

Newton (1642-1727) undersökte kurvor, som beskriver hur en punkt rör sig i planet. Punktens rörelse kan beskrivas med hjälp av två koordinater, x och y, där bägge storheterna varierar med tiden. Det kallas i modern matematik, att x och y är funktioner av tiden. Han anser att om kurvan är given kan man beräkna rörelsens hastighet. Hastigheten för punkten kan bestämmas genom att betrakta hastigheterna i x- och y-led var för sig som sidorna i en parallellogram. Riktningen för punktens hastighet kan avläsas som riktningen på diagonalen i parallellogrammen. Hastighetens riktning motsvarar då tangenten. Newton gav sig på gränsvärdebegreppet också, men han lyckades inte ge en precis definition av det.

Från en samling bestående av olika metoder för tangentberäkning har man sedan kommit fram till en matematisk teori: differentialkalkylen. Fram till slutet av 1800-talet höll man på att rätta till de ”genialiska felen” som var inbygga i differentialkalkylen och gav kalkylen den form som den har idag.

Så oberoende av varandra hade Leibniz och Newton uppfunnit grunderna till en av vetenskapens största prestationer, nämligen infinitesimalkalkylen. Infinitesimalkalkylen är en av grundpelarna för den moderna matematiken. Namnet kommer av att man från början uppfattade differentialerna dx och dy som något oändligt litet, vilket heter infinitesimal på engelska. Infinitesimalkalkyl är den äldre beteckningen för reell analys som vardagligt bara kallas analys och omfattar differentialkalkyl och integralkalkyl, där man inom differentialkalkyl studerar tillväxthastigheten hos funktioner. Tillväxthastigheten definieras som ett gränsvärde och uttrycks med hjälp av funktionens derivata, vilken beräknas med hjälp av derivering. Derivatan anger ett mått på hur en minimal förändring av någonting har skett.

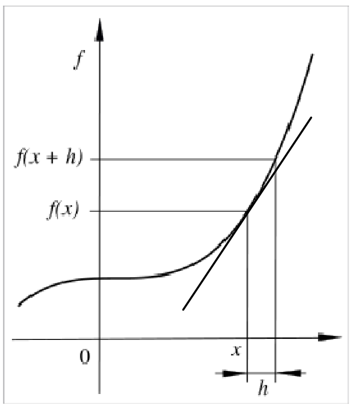
2.4.2 Derivatans definition

Låt en reell funktion f av en variabel, vara definierad i en omgivning av en punkt x. Funktionen f kallas deriverbar i punkten x om gränsvärdet till differenskvoten

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existerar. Gränsvärdet kallas derivatvärdet till funktionen f i punkten x. Funktionen $x \to f'(x)$, som är definierad i alla de punkter, i vilka f är deriverbar och vars värden är funktionen f:s derivatvärden, kallas derivatan till funktionen f. Den betecknas f'.

Att en funktion f är deriverbar i en punkt x, betyder geometriskt att grafen till f har en tangent i punkten $(x, f(x))$. Derivatvärdet $f'(x)$ är riktningskoefficienten för denna tangent och anger därmed lutningen hos kurvan i punkten x.



Figur 1 Differenskvoten och tangenten

Derivatan kan också ges en kinetisk tolkning. Anta att en partikel rör sig i en rätlinjig bana och att dess läge vid tiden x är $f(x)$. Differenskvoten $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ger då medelhastigheten under tiden från x till $x+h$, och gränsvärdet, om det existerar, hastigheten vid tiden x.

Andraderivatan till en funktion ger upplysningar om formen hos motsvarande graf och kinetiskt kan andraderivatan tolkas som acceleration.

2.5 Vilken är derivatans roll i matematiken och i de naturvetenskapliga ämnena

Enligt Thompson (1991) introducerade Newton infinitesimalkalkylen för att kunna förklara planeternas rörelse runt solen. Idag används den enligt Stewart (2003) bland annat för att beräkna hastighet, acceleration, bestämma funktioners maxima och minima, för att beräkna satelliter och rymdskepps omloppsbanor runt jorden, befolkningstillväxten, beräkna hur fort kaffepriset ökar, för att ge väderprognoser, för att mäta effekten av medicinering vid hjärtproblem och för att beräkna livförsäkringens premieavgift. Derivatan används flitigt inom den tekniska sektorn tack vare att den kan ange förändringen i en angiven punkt.

2.6 Vilka bakgrundskunskaper krävs för att elever ska få en bra förståelse av begreppet derivata.

Enligt Tall (1985) skall eleverna arbeta med förändringar, icke linjära samband, fördröjningar och svängningar, med andra ord med system som förändras i tiden och som är mycket svåra att förutsäga för den mänskliga hjärnan. Att arbeta inom den matematiska analysen (infinitesimalkalkyl) ställer krav på matematisk förståelse och bra matematikkunskaper. Eleverna måste se sambandet mellan olika matematiska delområden för att kunna förstå att vi med hjälp av algoritmer kan beskriva de förändringar som ständigt sker inom biologiska, sociala, ekonomiska och kulturella miljöer i vår omvärld.

I matematikundervisningen under hela grundskolan och i gymnasiet har eleverna lärt sig olika matematiska begrepp. Dessa har blivit inlärda var för sig och eleverna har sällan fått något sammanhang mellan de olika delarna (Tall, 1985).

När begreppet derivata introduceras börjar man sätta ihop flera olika delar till en helhet som dessutom går att koppla till något konkret och verklighetsbaserat fenomen. För att lyckas med förståelsen och beräkningen av derivator krävs det att eleverna har en viss förförståelse i alla de olika delarna som ska sammanfogas till en helhet. Eleverna måste kunna räkna med polynom, samt faktorisera dessa. De måste kunna lösa och tolka ekvationer av andra och högre grad och potensekvationer. Ekvationer är specialfall av polynom som har fått ett värde. Ofta beskrivs även funktioner med hjälp av polynom. Funktionerna utgör en av de viktigaste grunderna i matematiken. Eleverna skall kunna lösa och tolka polynomfunktioner, exponentialfunktioner och potensfunktioner. De ska också kunna beräkna tangentens lutning till dessa olika funktioner (Tall, 1985).

Tall (1985) föreslår att, för att inlärningen ska vara den bästa möjliga borde eleverna behärska följande moment:

- Manipulering av enkel algebra för att kunna hantera formlerna
- Rita och visualisera grafen av enkla kurvor
- Bestämma lutningen av en rät linje (förstagradsfunktion), och förstå positiv och negativ lutning
- Flitig användning av grafritande miniräknare

2.7 Styrdokumenten

Lpf 94 (1994 års läroplan för de frivilliga skolformerna) säger tydligt och klart att kunskapen ska kunna kopplas till vardag i följande avsnitt ur Lpf 94: ” Elevernas kunskapsutveckling är beroende av om de får möjlighet att se samband. Skolan skall ge eleverna möjligheter att få överblick och sammanhang, / … /. Eleverna skall få möjlighet att reflektera över sina erfarenheter och tillämpa sina kunskaper. / … / Den värld eleven möter i skolan och det arbete eleven deltar i skall förbereda för livet efter skolan.” (Lärarboken, s. 45).

Eleverna har även följande uppnående mål. De ska kunna: ”formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för yrkes- och vardagsliv” och ” observera och analysera människans samspel med sin omvärld utifrån ett ekonomiskt och ekologiskt perspektiv” (Lärarboken, s. 49).

Lpf 94 uttrycker också tydligt att läraren skall ” i undervisningen utnyttja kunskaper och erfarenheter av arbets- och samhällsliv som eleverna har eller skaffar sig under utbildningens gång” (Lärarboken, s. 51).

I kursplanen för Ma C står det:

> Eleven skall:
>
> • kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för tillämpningar och vald studieinriktning med fördjupad kunskap om sådana begrepp och metoder som ingår i tidigare kurser
>
> • kunna förklara, åskådliggöra och använda begreppen ändringskvot och derivata för en funktion samt använda dessa för att beskriva egenskaper hos funktionen och dess graf
>
> • kunna dra slutsatser om en funktions derivata och uppskatta derivatans värde numeriskt då funktionen är given genom sin graf
>
> • kunna använda sambandet mellan en funktions graf och dess derivata i olika tillämpade sammanhang med och utan grafritande hjälpmedel (Skolverket, 2000)

2.8 Lärares upplägg av undervisningen

Här följer ett avsnitt med fokus på hur undervisningen ser ut idag, där vi först presenterar tre (en äldre och två nyare) förekommande läroböckers upplägg och sedan redovisar resultatet av en fallstudie av uppläggningen för introduktion av derivata.

2.8.1 Den äldre lärobokens upplägg

Matematik 2000 för det naturvetenskapliga programmet, av Björk (1995).

Boken är indelad i två delar, första delen handlar om algebra och derivator, och andra delen om trigonometri. Derivator behandlas i båda delarna.

Kapitlet om derivator inom algebradelen börjar direkt med att beskriva tangentens riktningskoefficient k med hjälp av gränsvärdesbeteckning.

k-värdet: $k = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Boken använder ett exempel där en kropp rör sig en viss sträcka under en viss tidsperiod. Först beräknas medelhastigheten i ett valt tidsintervall och sedan hastigheten vid en utvald tidpunkt, där hastigheten är just derivatan.

Boken övergår i att beskriva derivatan som det gränsvärde som differenskvoten (ändringskvoten) närmar sig då h går mot 0, vilket kallas derivatan av funktionen i punkten x och betecknas $f'(x)$. Derivatan $f'(x)$ i punkten x är ett tal. Eleverna måste lära sig att tolka och bestämma detta tal. Sedan fortsätter boken med två tillämpningar av derivator där eleverna tränar sig i att se förändringen och lära sig att tolka derivatans symbol. Därefter finns det ett flertal uppgifter som går ut på att använda derivatans definition vid olika typer av problemlösning.

Deriveringsregler för polynomfunktioner följer direkt efter detta med ett antal lösta exempel och tillhörande uppgifter, som skall lösas algebraiskt. Kapitlet om derivator avslutas med andraderivatan och som överkurs finns också, numerisk derivering.

Derivatorna tas åter upp inom trigonometridelen, efter att triangelsatserna, trigonometriska formler, ekvationer, trigonometriska kurvor och radianbegreppet har behandlats.

Först presenteras derivatan av *sin x* och *cos x*, vilka följs av flera uppgifter, där eleverna skall bestämma derivatan hos olika funktioner. Det är derivatan hos sammansatta funktioner, produkter och kvoter som ska beräknas rent algebraiskt, samt ett flertal problem med tillämpningar inom fysik, ekonomi, biologi och teknik.

2.8.2 Skola 3´s lärobok

Matematik från A till E, gymnasiets matematik kurs C, av Holmström & Smedhamre (2006).

Kapitlet som handlar om derivator börjar med en kort beskrivning av vad förändring innebär och tar upp begreppet ändringskvot. Teorin följs av flera exempel och övningar inom ekonomi och naturkunskap, till dessa exempel och övningar används flera diagram och tabeller.

Därefter tas följande begrepp upp: kurvans lutning, gränsvärde och tangentens lutning i en punkt. De nya begreppen förklaras med olika exempel som löses med hjälp av bilder, diagram och förklarande texter. Derivatan definieras som gränsvärdet av ändringskvoten i en punkt. Boken förklarar också skillnaden mellan $f(x)$ och $f\,'(x)$. Detta följs av några exempel och övningar.

Deriveringsregler och tolkningen av förstaderivatan följer direkt efter med många exempel som förklaras steg för steg. Det tas upp tillämpningar inom ekonomi, fysik och biologi som kräver derivering och dessa förklaras mycket noggrant både algebraiskt och med text.

Det är först nu som tangenten tas upp, dess k-värde, tangeringspunktens koordinater och tangentens ekvation. De följande uppgifterna handlar om att hitta tangentens ekvation och beräkna dess lutning.

Efteråt förklaras på vilket sätt man kan avläsa och tolka olika grafer som föreställer kurvor och tangenter. Genom en beskrivning av växande och avtagande funktioner, av maximi-, minimi- och terrass-punkt, bygger de stegviss upp en funktions teckentabell. Flera lösta exempel av hur man sätter ihop och tolkar en teckentabell följer därefter med en noggrann beskrivning. För att bestämma maximi- eller minimipunkter, antal rötter och nollställe används även grafritande hjälpmedel, och det finns ett flertal uppgifter som har det här ändamålet. I samband med att de använder grafritande hjälpmedel introduceras även derivatans graf, som förklaras stegvis med hur man ritar och tolkar den. Följande uppgifter handlar om att konstruera och tolka olika grafer. Vissa uppgifter är rent algebraiska, andra handlar om tillämpningar inom främst ekonomi och fysik.

2.8.3 Skola 4´s lärobok

NT/c+d, Liber Pyramid gymnasiematematik för Naturvetenskaps- och Teknikprogrammen, kurs C och D, Wallin, Lithner, Wiklund och Jakobsson (2005)

Kapitlet som handlar om derivator heter ”Från förändring till derivatan ”och börjar med några exempel från vardagen där man använder sig av derivator. Vidare utvecklas begreppet ändringskvot med ett flertal exempel på medelhastighet, temperaturändring, marginalskatt och avslutas med ändringskvoter i små intervall.

Därefter presenteras definitionen av derivatan med hjälp av ändringskvot och gränsvärde följt av en sammanfattning där förändring, genomsnittlig förändringshastighet och förändringshastighet definieras enligt följande:

> ”Differensen $\Delta y=f(a+h)-f(a)$ anger förändringen från a till $a+h$ av funktionen $y=f(x)$.
> Ändringskvoten $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ anger den genomsnittliga förändringshastigheten (genomsnittliga förändringstakten) från a till $a+h$ av f.
> Derivatans värde $f\ '(a)$ anger förändringshastigheten (förändringstakten, ändringshastigheten, ändringstakten) av f när $x=a$.” (s.91)

Därefter kommer derivatans geometriska tolkning med tillhörande diagram. Här ges exempel på grafer till olika funktioner och hur tangenten till kurvan och riktningskoefficienten kan användas i beräkningar.

Avsnittet ”Beräkning av derivator” innehåller en mycket grundlig genomgång av derivatan av polynom med många olika exempel och övningar, vilka följs av exempel på tangenten och normalen till en kurva. Detta följs av ”Derivator i verkligheten” med ett flertal exempel inom ekonomi, naturvetenskap och teknik.

Först efter dessa avsnitt tas numerisk derivering upp och det visas hur en funktion kan beskrivas med en formel, en tabell och diagram. Vidare beskrivs funktioner med hjälp av grafer där begrepp som växande, avtagande, maxima och minimivärden, lokala max- och min-punkter, största och minsta värde förklaras med hjälp av många exempel och tillämpningar.

Kapitlet avslutas med fyra historiska problem som kan lösa genom derivering och olika blandade uppgifter.

2.8.4 En fallstudie av gymnasielärares undervisning

Utifrån Hellrups (2004) fallstudie av tre gymnasielärare så framgår det tydligt att introduktionen och det fortsatta upplägget av derivata är individuellt förankrat, trots gemensamma mål vilka är nedskrivna i styrdokumenten för matematikundervisningen. Beroende på lärarnas egna erfarenheter och tolkningar av vad som är viktigast, formas undervisningens innehåll. Den yttre strukturen av upplägget är ganska lika men tyngdpunkten på förståelse eller process varierar. Det vanligaste upplägget följer läroböckerna och kompletteras av egna exempel. Det innebär att lärarna börjar med exempel om medelhastighet och hur det åskådliggörs med en graf och hur man konkret räknar ut medelhastigheten och att det är samma sak som de tidigare har räknat ut men då kallat räta linjens lutning och riktningskoefficient eller kort *k*-värde. Även beteckningar som Δs och Δt införs. Lärarna visar att i en ickelinjär funktion så använder man sekanten för att beräkna medelhastighet. Härifrån flyttar man sekanten så att den mer och mer närmar sig tangenten till kurvan för att till slut bli tangenten och att den då motsvaras av momentanhastigheten i den punkten/det ögonblicket. För att sedan övergå till uträknandet av tangentens lutning och här introduceras gränsvärdesbegreppet och deriveringsreglerna och senare också differenskvot och derivatans definition. Alla lärare i fallstudien har en praktisk uppläggning med mycket egen räkning för att befästa kunskapen och ytterst lite tid läggs på den teoretiska stringensen som finns med bevisning och härledning av dessa. Så oftast får eleverna ingen tydlig koppling till den bakomliggande akademiska matematiken som indirekt styr den matematik som eleverna ska lära sig. Likaså är det bara en av lärarna i fallstudien som fokuserade på förståelsen och parallellt med genomgången av den praktiska delen med räkning och inlärning av deriveringsreglerna och annat lägger lika stor vikt vid att prata och diskutera de nya begreppen för att befästa dessa och deras innebörd och betydelse för vardagen. Han ger även flera olika exempel på var i vardagen man använder derivata för att de lättare ska kunna använda begreppen i vardagen och i sin framtida yrkesutövning.

2.9 Svårigheter

De båda studenterna Berggren och Ekblad (2006) har i en tidigare C-uppsats gjort en sammanställning av svårigheter som eleverna kan ha med derivata. De har funnit fyra områden där eleverna har svårigheter med undervisningen. Dessa är: dåliga förkunskaper, språket, tolkning av grafer och representationspreferens.

Här följer nu ett avsnitt där vi presenterar dessa svårigheter med att förstå derivata och några möjliga sätt att minska dessa.

2.9.1 Dåliga förkunskaper

Enligt Berggren och Ekblad (2006) omfattar de dåliga förkunskaperna att eleverna har svårt att räkna algebraiskt, svårt för att hantera proportioner och förhållanden, samt svårigheter att tolka och förstå den bildliga framställningen av en funktion med hjälp av en graf.

Även Gunnarsson (2006) finner i sitt examensarbete att eleverna har svårt att räkna med bråktal och andra grundläggande algebraiska färdigheter. Likaså finner Gunnarsson att många anger en punkt med bara x-koordinaten, och tappar därmed sambandet mellan x- och y-koordinater.

Löwing (2002) menar att här finns en svårighet som är svår att överbrygga, eftersom detta skulle kräva att alla lärare oavsett stadium känner till innehållet, målen och didaktiken för alla stadier för att få en så bra kontinuitet som möjligt för eleverna. Detta för att eleverna i sin tur ska kunna konstruera och strukturera sin kunskap till varaktig förståelse.

2.9.2 Språkliga svårigheter

De språkliga svårigheter som Berggren och Ekblad (2006) fann utgörs många gånger av krockar mellan vardagsspråket och det mer strikta matematiska språket. Dessutom fann de att det finns två definitioner av derivata, nämligen en tydlig där derivata är ett verkligt värde som 5, 39 eller 3,47 och en där derivatan är en funktion till exempel $f'(x)=x^2+3x$. Detta ställer till med problem för elevernas förståelse.

Även Gunnarsson (2006) har funnit att eleverna har svårigheter med att förstå vad den exakta matematiska innebörden är i orden som används i matematikundervisningen, vilket gör att många elever har svårt att uttrycka sig matematiskt. Detta fann han då flera elever har svårt att ge en språklig förklaring på en uppgift och istället försöker förklara med hjälp av matematiska beräkningar. Gunnarsson tror att det finns en mental blockering mot att använda språkliga förklaringar i matematiken, eftersom eleverna är osäkra på det här området. Dessa språkliga svårigheter visar sig även när de ska läsa uppgiften och sedan tolka vad de ska göra och förstå vilka matematiska uträkningar som ska göras för att de ska hitta det svar som söks.

Enligt Tall (1985) kan detta kopplas till hur läroböckerna är upplagda. Tall säger att, de ovan beskrivna läroböckernas upplägg av undervisningen om derivata är det traditionella sättet att närma sig subjektet, i vårt fall derivatan, men inte det mest effektiva. Tall menar att språket är för informellt, vilket kan orsaka oväntade svårigheter. Den inledande matematiska analysen genomströmmas av ord och meningar som är svåra att tolka och förstå eftersom de är mer eller mindre diffusa. Eleverna har också svårt för de olika symbolerna som används i samband med derivatan. Tall menar vidare att själva definitionerna upplevs som tråkiga och stela av eleverna. Ett annat grundläggande krav som Tall ställer för att eleverna ska överbrygga de språkliga svårigheterna är att läraren själv kan och förstår begreppen.

Viholainen (2006) har vid djupintervjuer av två studenter, om deras kunskaper om funktioners kontinuitet och deriverbarhet och om det finns samband däremellan, kommit fram till att det finns stora brister i deras begreppsförståelse, vilket leder till att det blir fel i deras resonemang vid lösandet av uppgifterna. Han fann att studenterna drar felaktiga slutsatser beroende på att de inte är helt säkra på vad de egentligen får reda på. I och med att de inte helt har förstått begreppens innebörd har de också svårt att utnyttja begreppen vid förklaringar och motiveringar. Viholainen fann att studenterna istället använder sig av en visuell beskrivning, där de med hjälp av tangenten till funktionen förklarar om funktionen är kontinuerlig och deriverbar, eller så försöker de att använda räknereglerna för derivering vid förklaringarna. Något som de båda studenterna undviker så långt som möjligt är derivatans definition och de verkar även vara osäkra på vad den egentligen säger och hur den är kopplad till tangenten respektive räknereglerna. Trots detta uppvisade de, enligt Viholainen, en stor säkerhet i den metod de valde, eftersom när de ställdes inför motsägelser så höll de fast vid sin första tanke utan att närmare ta reda på vad som var upphovet till motsägelsen. Likaså använde de hellre ett vardagsspråk än ett korrekt matematiskt språk. Viholainen ställer sig frågan om detta är ett tecken på att man tror att man har förstått begreppen fullständigt och inte reflekterar över vad den exakta matematiska definitionen innebär och vad den har för betydelse? Eller är det bara för att de känner sig säkrare då de använder det lättare vardagsspråket? Viholainen anser att mycket av studenternas svårigheter beror på deras inkorrekta begreppsbild över derivering och på deras tidigare erfarenheter och ovilja att använda derivatans definition. Han menar att detta leder till att de väljer fel metod och drar fel slutsatser. Viholainen tror att en av anledningarna till resultatet är att traditionellt sett används regler och visuell åskådning oftare än derivatans definition, vilket har gjort att studenterna inte har någon tydlig begreppsförståelse av derivatans innebörd.

Löwing (2002) anser att det även finns andra språkliga svårigheter i dagens mångkulturella skolor. Den språkliga mångfalden ställer andra krav på språket som används, eftersom eleverna kommer från olika kulturer med olika traditioner för matematik och olika sätt att uttrycka olika matematiska procedurer. Löwing menar att läraren behöver en matematikdidaktisk teori att falla tillbaka på som omfattar olika sätt att uppfatta begreppen på och olika sätt att uttrycka sig på. Har läraren inte en teori att falla tillbaka på, anser Löwing att det är troligt att läraren förklarar utifrån sin förståelse som ligger långt från elevens, vilket gör att eleven inte tillgodogör sig förklaringen och sitter lika oförstående efter förklaringen. Hon anser att läraren istället borde ha lärt sig att lyssna till eleven och uppfatta och genomskåda okända metoder och utifrån eleven kända metoder bygga vidare för att eleven ska förstå det nya.

Löwing (2002) anser att detta kräver, att läraren är väl insatt i innehållet och de matematiska strukturerna som finns och att läraren har utvecklat ett språk som fungerar vid formella förklaringar eller när denne behöver förklara med ett mer vardagsnära ordval för att eleverna ska förstå. Hon menar att saknas det en matematikdidaktisk teori att hänga upp undervisningen på så är det lätt att läraren börjar improvisera och använda falska metaforer för att klara sig ur knepiga situationer, vilket kan leda till ologiska och icke fullständiga förklaringar för eleverna. Likaså anser hon att ett slarvigt språk hos läraren kan leda till att eleverna har svårare att förstå och lära sig matematiska begrepp. Ett slarvigt språk kan även göra att eleverna inte har några klara begrepp att bygga vidare sin kunskap utifrån och de kan då inte heller fördjupa innebörden i begreppen. Hon menar att det krävs ett strikt matematikspråk med tydliga definitioner för att undvika missförstånd. Hon har även funnit att det idag används en blandning av vardagsbegrepp och matematiska begrepp som gör matematikundervisningen förvirrande.

Bristen på ämnesdidaktisk teori kan i vissa fall leda till att lärare och elever söker enkla procedurella lösningar istället för att reflektera över innebörden i vad de gör, anser Löwing (2002). Hon tycker att vi ska börja med att ställa vad-frågorna och när de är klara så ska vi tänka över hur-frågorna. Hon menar också att en ämnesdidaktisk teori ska innehålla hur man utifrån ett laborativt arbetssätt eller hur man utifrån metaforer kan knyta samman vardagsspråket med ett mer korrekt matematiskt språk och då även knyta ihop det konkreta med den abstrakta matematiska formuleringen. Vikten av ett korrekt och utvecklat matematiskt språk blir större ju mer avancerad matematik eleverna ska läsa, eftersom matematiken blir mer och mer abstrakt.

Löwing (2002) menar att detta kräver att läraren behärskar ett språk som förklarar både på ett vardagsnära sätt och på ett mer formellt matematiskt sätt, den matematik som eleverna ska lära sig för att de ska kunna koppla samman skolmatematiken med sin vardag.

Gunnarsson (2006) menar att en del av de språkliga svårigheterna skulle kunna avhjälpas om man införde språkliga förklaringar i matematikundervisningen, eftersom förståelsen då skulle öka.

Löwing (2002) anser även att man har försökt att lösa många begreppsliga problem med hjälp av ändrade arbetsformer och metoder istället för att lösa det verkliga problemet, med att konkretisera vad det är eleverna ska lära sig, istället för att fokusera på hur det ska läras. Hon menar att istället så ska eleverna få en preliminär definition som de undersöker och jämför med tidigare erfarenheter och begrepp. Detta skulle leda till att eleverna kan bygga upp ett helt nätverk av begrepp som är mer eller mindre sammanlänkade.

Tall och Davis (2002) menar att användningen av scheman eller begreppsbilder är en nödvändig förutsättning för högre nivåer av mentala funktioner, eftersom de ger eleverna en förmåga att kategorisera, organisera och strukturera sin kunskap. Enligt Tall och Davis har Skemp redan 1986 klargjort att scheman spelar en huvudroll i relationell förståelse. Tall och Davis menar vidare att den mänskliga hjärnan inte på ett naturligt sätt själv klarar av att hitta en rak och framåtriktad medvetenhet som kan organisera aktivitetscheman när det gäller insamlandet av matematiska tankar. En enkel anledning till detta är att den mänskliga hjärnan är indelad i ett språkligt centra och ett motoriskt centra.

Grevholm (2005) förespråkar att lärare även använder sig av begreppskartor för att synliggöra för eleverna vilka kunskaper de har och hur de är kopplade till varandra. Begreppskartorna bildar tydliga strukturer där det är lätt att tillfoga nya linjer med ny kunskap. Grevholm (2005) säger vidare att Ebbe Möllehed har kommit fram till att det som påverkar elevers förmåga att lösa problem är hur de förstår texten i uppgiften, vilket överensstämmer med våra och andra lärares erfarenheter. Trots detta fokuseras det sällan i klassrummet på betydelsen av att förstå texten i uppgifterna, alltså ren textförståelse. Även Säljö (2005) visar på vikten av att förstå den lästa texten för att kunna knyta ihop gammal kunskap med ny. Grevholm menar då att begreppskartor kan ge både lärare och elever den struktur som behövs för att tydligare koppla samman olika begrepp och samband med varandra. De kan även få eleverna att fokusera på det väsentliga i avsnittet. Får dessutom eleverna göra sina egna begreppskartor vilka de sedan jämför med kompisarnas så får de även möjligheten att upptäcka likheter och skillnader medan de använder ett matematiskt språk där de får uttrycka sina matematiska tankar och argumentera för sina val.

Därför menar Löwing (2002) att lärare både måste få fördjupade ämneskunskaper och ett lärarperspektiv som omfattar hur eleverna lära sig matematik och vilken nivå som är rimlig på olika nivåer, samt kunskaper om elevernas förmåga att förstå och hur de kan bygga upp förståeliga matematiska modeller. Att elever beroende av sin förmåga ska erbjudas olika förståelsenivåer – de som inte klarar av att förstå en ren abstrakt förklaring med stringenta bevis ska åtminstone erbjudas en förståelse med hjälp av goda metaforer.

2.9.3 Svårigheter med tolkningen av grafer

Berggren och Ekblad (2006) fann att elevernas svårigheter med att tolka grafer bottnar dels i de dåliga grundläggande kunskaperna om linjära grafer och dels i de svårigheter som uppstår när derivatan introduceras, eftersom de ickelinjära graferna då kommer in på allvar. Då derivatan ofta ställer till med ännu mer bekymmer för vad graferna egentligen visar. Även Gunnarsson (2006) har funnit att eleverna har svårt att tolka grafer och koppla samman bilden av grafen med texten för att kunna lösa sina uppgifter, vilket visar sig när han ber dem att berätta vad derivata är ett mått på och de flesta svarar att det är lutningen hos grafen, medan det korrekta svaret borde vara förändringen, som visserligen representeras av lutningen hos tangenten till grafen.

Trots detta har det enligt Aspinwall, Shaw och Presmeg (1997) kommit många åsikter om att analyskursernas upplägg bör förändras så att visualiseringen är central i kursen.

Argumenten som framförs är att visualisering är nödvändig för att förstå matematiken, men Aspinwall, Shaw och Presmeg (1997) menar att studier har visat att studenters förståelse är typiskt algebraisk och inte visuell. Anledningarna till detta är flera, men omfattar följande påståenden:

1 Tron att visuella bevis inte är riktiga matematiska bevis.

2 Att ett algebraiskt lösningsförfarande istället för ett grafiskt eller visuellt är mer vanligt förekommande vid lösandet av rutinproblem på analysprov.

3 Övertygelsen hos studenter och lärare som använder analys är att det är skicklig manipulering av symboler och siffror.

Aspinwall, Shaw och Presmeg (1997) menar att bilder kan vara ett hinder för eleverna vid räkning av uppgifter de är säkra på. De menar att synliga bilder kan vara till besvär och göra att eleverna inte klarar uppgiften.

Aspinwall, Shaw och Presmeg (1997) har i sin tur funnit olika teorier om vikten av bilder i matematiken. Smith menar att det är bra att använda ritade bilder för att konkretisera matematiken. Smith säger även att de skickligaste matematikerna inte behöver rita upp bilderna utan de kan förmodligen se dem på näthinnan och använder dem utan att tänka på det. Medan de har funnit att Krutetskiis anser att, den matematiska förmågan och skickligheten med den rumsliga uppfattningen och visualiseringen av abstrakta matematiska förhållanden inte är nödvändiga, men att den kan vara användbar. Enligt Aspinwall med flera har Krutetskii även funnit att elever med bra resultat på förmågan att skapa bilder har större svårigheter med den begreppsmässiga inlärningen än elever med sämre resultat. Likaså har Aspinwall med flera funnit att Radatz anser att mentala bilder kan orsaka kognitiva svårigheter och att information som lämnas i diagram ställer högre krav på elevernas förmåga att tolka informationen för att de ska förstå den och att elever som tänker i mentala bilder oftare behåller onödiga konkreta detaljer. Av detta drar Aspinwall med flera slutsatsen att den stora skillnaden inte bara beror på den individuella förmågan att skapa bilder utan även på skillnaden mellan hur olika personer skapar sin bild. De stödjer sig även på Richardsons åsikt om att ska bilder användas måste de vara kontrollerbara, vilket de menar att bilderna som olika personer skapar inte är. Aspinwall med flera fann att Presmeg tidigare har funnit att bilder ofta kan vara ett hinder vid problemlösning eftersom elevernas bild inte alltid stämmer överens med det nya och då håller de hellre kvar vid den gamla som känns säkrare även om motsatsen bevisas.

Aspinwall, Shaw och Presmeg (1997) håller med Wheatly och Brown som menar att bilder är konstruerade, föreställande, reducerande och bibehållande. De stödjer sin teori på den studie som de har gjort av Tim som löser fyra olika deriveringsproblem och inte stöter på några problem förrän han ställs inför en bild. De menar att svårigheterna med att förstå bilder bottnar sig i tidigare felaktigt använda bilder då bilder stannar kvar längre i minnet än formler. De menar då att det är bättre att undervisningen grundar sig på en ren algebraisk presentation av derivatabegreppet.

Tall (1985) föreslår att användningen av grafritande miniräknare utökas i skolorna. Han menar nämligen att detta skulle kunna medför att den teoretiska delen blir lättare att utveckla och förstå, samt att eleverna blir aktivare under inlärningsprocessen istället för att vara passiva. Genom att prova olika funktioner och deras derivator utvecklar eleverna en kognitiv förståelse och de får en sammanhängande relationell förståelse för begreppen. En grafisk visualisering innebär inte bara att eleverna lär sig att bestämma en funktions derivata utan också vad som menas med att en funktion är deriverbar eller inte deriverbar. En grundlig förståelse av derivatan ökar möjligheterna att koppla den till verkligheten, menar Tall.

2.9.4 Representationspreferenser

Det som Berggren och Ekblad (2006) kallar för representationspreferenser är det som vi kallar för att se sambanden mellan den algebraiska framställningen och den konkreta omvärlden eller se kopplingen mellan skolmatematiken och vardagen, vilket omfattas av den relationella förståelsen.

Gunnarsson (2006) finner att det finns ett samband mellan relationell och instrumentell förståelse så till vida att det är lättare att få ett bra resultat om du har förstått innebörden och inte bara kan räkna med derivatan. En av anledningarna till det bättre resultatet på den praktiska (instrumentella) delen tror han beror på att eleverna får mer undervisning på den delen än på den övergripande förståelsen av vad derivata är.

Tall (1985) anser att det krävda målet är relationell förståelse, där de olika delarna fogas samman på ett sammanhängande, ömsesidigt och stödjande sätt till en varaktig förståelse, medan de olika delarna var för sig enbart kräver instrumentell förståelse. Eleverna måste alltså se helheten som är mycket större än delarnas summa. Om man från början ger eleven en chans att ana hela begreppet finns det större möjligheter för eleven att organisera och utveckla sitt eget lärande, menar Tall.

Även Wikström (1997) har funnit att om man betraktar gymnasiets kursplaner i matematik för de högre kurserna ser man att dess formuleringar innebär krav på relationell matematik, men tittar vi på de nationella prov och övriga prov som förekommer så visar de istället att lärarna enbart kontrollerar om eleverna kan använda formlerna, alltså en instrumentell matematik. Eleverna får alltså ingen möjlighet att inse att derivator är verktyg som kan användas för en beskrivning av verkligheten. Enligt Wikström ligger problemet i att gapet mellan kursplanen och Läroplanen för gymnasieskolan, Lpf 94, är för stort. Wikström menar att läroplanen har en inriktning mot förståelse av system, process och sammanhang, medan kursplanen mer har en inriktning mot manipulativ mekanisk hantering av formler, där man förbiser att matematiken är ett verktyg som får ett verkligt värde för eleverna först när den används för att förstå vår omvärld. I andra sammanhang kan matematiken också ha ett egenvärde i sig själv.

Wikström (1997) menar att matematiken har blivit ett självändamål utan praktisk betydelse på gymnasiet, vilket gör att det är svårt att nå upp till målen som regeringen och riksdagen har fastställt i Lpf 94. Enligt Lpf 94 ”skall varje enskild elev kunna observera och analysera människans samspel med sin omvärld utifrån ett ekonomiskt och ekologiskt perspektiv” och kunna ”analysera och lösa matematiska problem av betydelse för yrkes- och vardagsliv” (Lärarboken, s. 49).

Löwing (2002) menar att ett annat problem i sammanhanget är att många lärare själva är vana vid en procedurinriktad undervisning från sin egen skoltid, medan dagens läroplan kräver en undervisning som är inriktad på förståelse, vilket gör att de numera måste ha större kunskap om hur olika moment och begrepp är kopplade till varandra.

Dessa problem med att koppla samman instrumentell och relationell förståelse till en gemensam kan ha neurologiska orsaker, vilket Tall och Davis (2002) har funnit. De fann att neurologen Ramachandran förklarar det på följande sätt:

> Fundamental problem arises when the left hemisphere tries to read and interpret messages from the right hemisphere. … Crudely speaking, the right hemisphere tends to use an analogue – rather than digital– medium of representation, emphasizing body image, spatial vision and other functions of the how pathway. The left hemisphere, on the other hand, prefers a more logical style related to language, recognizing and categorizing objects, tagging objects with verbal labels and representing them in logical sequences (done mainly by the what pathway). This represents a profound translation barrier (p. 283, author’s italics) (Tall och Davis, 2002, s.153).

Tall och Davis (2202) har funnit att detta hinder för korrekt tolkning kan observeras hos vuxna som har en skada på ”corpus callosum” (hjärnbalken), som utgör bryggan mellan den högra och den vänstra hjärnhalvan. Denna brygga är inte helt utvecklad hos mindre barn, men detta förklarar inte varför äldre barn och vuxna inte är kapabla att utveckla aktivitets- och kunskaps- kartor/scheman. Det är inte sällsynt, att det bland matematikstudenter finns de som kan lösa mycket komplicerade matematiska uppgifter, men de kan inte förklara hur de har tänkt. Det område i hjärnan som är avsett för det förklarande minnet kan nämligen ha problem med att utnyttja den rådata som är lagrad i det procedurmässiga (kontinuerliga) minnet. Enligt Tall och Davis har läraren en jättestor funktion att fylla här, nämligen att fungera som en extern ledning och hjälpa eleverna att koppla samman det förklarande minnet med det procedurmässiga minnet.

Ett annat sätt att överbrygga avståndet mellan det konkreta och det abstrakta har Hähkiöniemi (2006) funnit. Han kom i sin undersökning fram till att man inte ska underskatta vikten av att arbeta med den konkreta världen även när det gäller högskolestudenter, eftersom studenterna gärna använder gester för att förklara och illustrera sina tankar. Gester är mycket användbara för att illustrera tillväxt, lutning osv. Gesterna inte bara hjälper studenterna utan de är även en integrerad del av deras tankar. Hähkiöniemi anser precis som han fann att Roth och Welzel har konstaterat, nämligen att gesterna hjälper till att göra abstrakta begrepp synliga och konkreta. För bästa effekt så måste de yttre gesterna vara sammankopplade med en inre representation och förståelse. Han menar att växelverkan mellan yttre och inre strukturer är avgörande för förståelsen.

Hähkiöniemi (2006) har även funnit att inlärningen sker från process till objekt. Det är inte säkert att eleverna lär sig av att utföra en process och efter det konstruera en ny process. De lär sig av att handskas med föremålet och lära känna dess egenskaper. De handskades med derivata i den konkreta världen och lärde känna dess egenskaper. Han menar att om man inte kopplar derivatan till något verkligt kommer studenterna enbart att se derivata som en räkneprocess med deriveringsregler. Han anser att får eleverna istället en chans att lära sig derivata i den konkreta världen så finns en förståelse även om det blir fel i objektifieringen av föremålet. Har de förstått kopplingen mellan reglerna och den konkreta världen kan de alltså dra slutsatser om till exempel extremvärden utan att ha den exakta algoritmen.

För inlärningen i den konkreta världen måste det ges en beskrivning så att vi kan skifta fokus från process till innebörden av dessa processer (Hähkiöniemi 2006). En av hans avsikter med studien var att hitta ett sätt att förklara den konkreta världen med olika genomskinlighetsbegrepp. Han har funnit att gränsvärdesprocessen kan fungerar som en bro mellan den konkreta och den abstrakta symbolvärlden.

Hähkiöniemi (2006) fann även att processförståelse kan förekomma utan begreppsförståelse men även tvärt om, man kan ha begreppsförståelse utan att kunna räkna med det. Likaså kan man visa processkunskap och begreppskunskap var för sig men när det kommer till problemlösning så kommer svårigheterna. Men då har man åtminstone kunskap att bygga vidare på.

Avslutningsvis menar Hähkiöniemi (2006) att när studenterna ser derivatan som en förändring i den konkreta världen, vilken är representerad som en tangents lutning i en symbolisk graf har de förstått sambandet och kan även koppla räkneoperationerna till verkligheten och den symboliska grafen.

2.9.5 Övriga svårigheter

Löwing (2002) har funnit att ett annat problem för bra lärande är att lärare och elever har olika motivation för lärande. Enligt Löwing vill läraren att eleven ska förstå, vilket står i kontrast till vad många elever vill. Eleverna vill oftast bara undvika att göra bort sig och få rätt svar på de uppgifter som de åläggs att lösa, vilket de vill göra på enklast möjliga sätt och med minsta möjliga ansträngning. Lärarnas ambition är många gånger istället att förklara innebörden och med hjälp av den skapa förståelse hos eleverna. Läraren vill även föra en dialog med eleverna om matematiken de räknar med, vilket de flesta elever vill slippa. De ser gärna att någon kamrat löser uppgiften, så att de bara kan skriva av den och visa att de är klara. Löwing menar att om man har detta i åtanke när man tittar på lärarens situation, där man som lärare ska möta alla elever med deras olika förutsättningar, motivation och tidigare erfarenheter inser man ganska snart att det krävs mycket mer än akademiska kunskaper i matematik för att bli en bra matematiklärare.

Enligt Skemp (1978) inverkar även klassernas storlek på lärarnas förmåga att se alla elever. För om det är 30 elever i varje klass, har lärarna svårt att se varje elev och sättet de enskilda eleverna förstår matematiken på. Då blir det oftast så att eleverna blir bedömda och betygsatta efter svaren de ger på proven. Även om eleverna har rätt på provet är det mycket svårt att avgöra vilka mentala processer som har lett eleverna till deras svar, alltså om de har en relationell eller instrumentell förståelse för det gällande begreppet. Det bästa sättet att få en uppfattning om en elev verkligen förstår är att, ofta diskutera matematik med eleverna, men det är sällan tiden räcker till detta, enligt Skemp (1978).

2.10 Forskning idag och i framtiden inom derivata

Björkqvist (2003) har gjort en stor undersökning av hur forskarsituationen ser ut i Sverige. Han tycker att det är viktigt med forskning inom matematikdidaktik även i Sverige och många av de områden som det forskas på är aktuella internationellt sätt. Det bedrivs inte mycket forskning som är specifik för svenska förhållanden. Men han menar att forskningen som har nära kontakt med utländska forskare är positiv eftersom den kommer att visa att Sverige är ett land som är villigt att satsa på forskning inom matematikdidaktiken.

Han har funnit att i Sverige får fler del av forskningsrönen än i de flesta andra länder, vilket till stora delar beror på matematikbiennalerna och Nämnaren som har en upplaga på ca 5500 ex och utkommer 4ggr/år.

Han har funnit att det bedrivs mycket forskning inom områdena som behandlar hur eleverna och lärarna uppfattar matematiken, och hur eleverna agerar vid problemlösning samt vad som socialt pågår i klassrummet, medan forskning som rör metodiken har hamnat i skymundan. Han menar att det finns en fara med detta eftersom det behövs forskning som belyser betydelsen av storleken på klassen och klassens sammansättning av svaga/starka elever. Likaså menar han att det är viktigt att forskning som utgår från specifika matematiska begrepp eller tillvägagångssätt och forskning inom undervisningen om matematiska teman som orsakar svårigheter är områden som det bör forskas mer inom.

3 Problemprecisering

Mot bakgrund av ovan har vi valt att använda oss av följande frågeställning:

Hur uppfattar dagens gymnasieelever innebörden av derivata och hur kopplar eleverna derivatan till sin vardag?

3.1 Underfrågor

Vilka eventuella svårigheter har eleverna med att förstå derivata?

Vilka är orsakerna till svårigheterna?

4 Empirisk del

4.1 Metod

Vi vill med den här studien undersöka om gymnasieelever som läser Ma C har förstått derivatans innebörd och om de kan se kopplingen mellan skolans matematikundervisning inom derivata och den verklighet de lever i. Då vi ville ha ett stort underlag för att ha möjligheter att generalisera lite kom vi fram till att kvalitativa intervjuer skulle bli för omfattande. För vår undersökning tyckte vi att vi skulle få tillräckligt med underlag om vi gjorde en kvalitativ enkätundersökning istället. Då vi även var nyfikna på vilka svårigheter eleverna har med att förstå derivata och att finna möjliga orsaker till detta har vi även sökt i litteraturen för att finna svaren.

4.1.1 Urval

Vi valde att genomföra en enkätundersökning som riktar sig till elever som läser Ma C på gymnasiet och deras lärare. För att få större bredd i undersökningen valdes tre skolor med olika gymnasieprogram ut. (Senare tillkom en fjärde skola.) Skolorna som valdes hade även en geografisk spridning i norra Skåne och Småland. Vi valde skolor som vi kände lärare på eftersom det var enklast. Vi valde Ma C elever eftersom de skulle avsluta avsnittet om derivata lagom för vår undersöknings genomförande och då kunde vi direkt få se hur deras kunskapsbild såg ut. Vi vänder oss till dessa elever för att vi ska få större kunskap om vilken förståelse de har med sig efter undervisningen om derivata. Det är ett svårt kunskapsområde i matematiken men samtidigt ett grundläggande område för att eleverna ska kunna fortsätta sina matematikstudier. Därför är det av största vikt att blivande gymnasielärare i matematik känner till vilka svårigheter eleverna har med förståelsen av derivatan och om dessa svårigheter kan bero på att de inte ser sambandet mellan derivata och verkligheten.

4.1.2 Datainsamling

Efter noggrant övervägande valde vi enkäter som metod för den andra delen. Då dessa enligt Denscombe (2000) har till uppgift att frågeställaren ska upptäcka saker. Enligt Johansson och Svedner (2001) når du även fler respondenter och kan få ett bredare underlag till din undersökning. Enkäterna har i första hand utformats för att respondenterna ska ge svar på huruvida eleverna har förstått derivatans innebörd och om de kan se kopplingen mellan matematiken och vardagen. Vi har valt att göra en enkät med både fasta och öppna frågor (Denscombe, 2000), för att ha möjlighet att se vad eleverna har förstått och vad de anser.

Vi har även med frågor av den typ som Denscombe (2000) menar ger faktisk information, som elevens kön, skola och gymnasieprogram. Dessa frågor med faktisk information är frågor som inte kräver mycket i fråga om bedömningar eller personliga åsikter från respondenten.

4.1.3 Procedur

Enkätfrågorna konstruerades utifrån vår frågeställning och vår nyfikenhet på hur eleverna har förstått derivata och om de ser kopplingen till vardagen.

Lärare på skolorna där undersökningen skulle genomföras kontaktades för förfrågan om deltagande och de biföll oss i vår önskan om att deras klasser som läser Ma C skulle delta.

Enkätfrågorna översändes till handledare för granskning. Vi tillfrågade även de lärare vars klasser skulle ingå i undersökningen.

Utifrån handledarens synpunkter och våra egna eftertankar reviderades frågorna.

Vi valde att skicka ut enkäterna till tre skolor i norra Skåne och Småland.

På skola 1 besvarades tyvärr inte någon enkät av eleverna utan de kom tillbaka oanvända då läraren helt plötsligt ansåg att det inte fanns tid att genomföra enkäten. På skola 2 besvarades inte heller enkäten eftersom läraren ansåg att den var för svår att besvara. På skola 3 genomfördes enkäten torsdagen den 13 december under en matematiklektion. Eleverna som besvarade enkäten var åtta stycken och läser tredje året på följande program; IT-media, entreprenör och IT. De hade nyligen avslutat kapitlet om derivata när undersökningen genomfördes.

Dessa hämtades in på fredagen.

När vi fick veta att skola 1 och 2 inte hade möjlighet att ställa upp så ansåg vi först att vi inte hade tid att kontakta ytterligare skolor, eftersom tidsramen för det här arbetet inte tillät det, men vi bestämde oss för att ge arbetet lite mer tid och kontaktade ytterligare en skola i norra Skåne och de var villiga att ställa upp. På skola 4 genomfördes enkätundersökningen torsdagen den 17 januari. De 26 elever som besvarade enkäten går alla i årskurs 3 på naturvetenskapliga programmet. De hade avslutat avsnittet om derivata när enkätundersökningen genomfördes.

Dessa hämtades samma dag.

De enkäter som kom in räknades och sammanställdes, varpå de även analyserades.

4.1.4 Etiska övervägande

Enligt Vetenskapsrådet (2007) kan de etiska övervägande sammanfattas med fyra begrepp sekretess, tystnadsplikt, anonymitet och konfidentiellt.

För att säkerställa anonymitet hos respondenterna så var enkätundersökningen helt anonym och skolornas namn och geografiska läge har utelämnats i redovisningen av resultatet eftersom detta saknar relevans.

Enkäterna granskades av både handledare och lärare och dessa fick klartecken innan vi genomförde enkätundersökningen. Vi upplyste även respondenterna om att deltagandet var frivilligt och helt anonymt och att enkäterna kommer att makuleras efter bearbetningen. De fick lov att avstå från att svara på en eller flera frågor men vi var tacksamma om de besvarade alla frågor. Vi lämnade även våra telefonnummer om de behövde ställa frågor. Enkäterna avslutas med ett tack för att de deltagit och att vi uppskattar den tid de tagit till att besvara frågorna i enkäten.

Genom att göra ovanstående uppfyller vi Vetenskapsrådets (2007) och Johansson och Svedners (2001) krav om forskningsetik.

Vetenskapsrådet (2007) anser även att forskare ska understryka att det insamlade materialet är viktigt för forskningen.

4.1.5 Metoddiskussion

Vi valde att använda oss av enkätundersökningar för den andra delen av vårt arbete, eftersom vi på detta sätt kunde nå ut till fler respondenter än vad vi hade kunnat om vi valt intervjuer som vår arbetsmetod. Enligt Ejvegård (2003) är fördelarna med enkäter att de är enklare, billigare, mindre tidskrävande och de svar du får in är redan nedskrivna. Han framför även en annan fördel, nämligen att frågorna är identiska och svaren är oberoende av andras påverkan.

Till nackdelarna hör enligt Johansson och Svedner (2001) att de inte ger tillräckligt djup för att vara användbara och Ejvegård (2003) menar att svarsfrekvensen ofta är låg.

Utifrån den tid och det vi ville ha besvarat valde vi till slut enkäter. Tidigare positiva erfarenheter från enkätundersökningar bidrog också till att anse att Ejvegårds (2003) nackdel med låg svarsfrekvens inte vägde så tungt i förhållande till de positiva fördelarna med enkäter. Med enkäter skulle vi kunna nå ett större urval av elever och därmed kunna dra bättre slutsatser om deras förståelse av derivatans innebörd och om de ser kopplingen till vardagen. För att kunna utesluta dåliga kunskaper hos elevernas lärare som en orsak till elevernas svårigheter ville vi även ställa några frågor till lärarna. För enkelhetens skull valdes även här enkäter.

Vi har valt att avstå från att kopiera andras frågor och istället har vi valt att själva konstruera frågorna för att de ska kunna ge svar på våra frågeställningar.

Enligt Denscombe (2000) finns det inga garantier för att man kommer att kunna skapa ett bra frågeformulär bara för att man följer alla regler. De kan bidra till att det blir bättre om man redogör för vissa principer.

Det finns en hel del olika typer av frågeformulär, och de varierar när det gäller utseende, syfte och omfattning. Men för att de ska kunna karaktäriseras som ett forskningsmässigt frågeformulär, ska de vara utformade av nerskrivna frågor för att samla information, som sedan kan användas som data för analys, vilket vi valt att använda oss av.

Denscombe (2000), menar vidare att frågeformulär inte används för att ändra människors attityder, eller för att förse dem med information. Forskningsmässiga frågeformulär har istället till uppgift att se till att forskaren gör nya upptäckter. Det är viktigt att alla som ska besvara frågeformuläret får en identisk uppsättning frågor, eftersom detta enligt Denscombe underlättar bearbetningen av svaren.

Enkäten är utformad för att ge svar på om de har förförståelsen och den relationella förståelsen som krävs enligt följande:

Fråga 1-5 är inledningsfrågor som är lätta att svara på för att de ska komma igång.

Fråga 7-9 hoppas vi ska ge en liten uppfattning av om de har någon förförståelse

Fråga 6, 10-12, 17 tänker vi ska kunna ge svar på om de har förstått vad derivata innebär

Fråga 13-16 skulle kunna visa om de ser en koppling till vardagen vilket krävs för att de ska ha den eftersträvade relationella förståelsen

Fråga 18 för att få en uppfattning om hur de själva upplever svårigheten med att lära sig de olika momenten. Upplever de själva någon skillnad mellan avsnitten som kräver relationell förståelse och de med ren instrumentell hantering av algoritmer. Fråga 18 i förhållande till tidigare frågor skulle kunna ge svar på om eleverna har självinsikt om sina kunskaper eller ej.

Fråga 19-23 Avslutande frågor vilka också bör vara lätta att besvara. Fråga 19 och 20 skulle samtidigt kunna ge svar på om de har en motivation att lära sig derivering.

Vi har valt att använda oss av frågor i vårt frågeformulär som fokuserar på att respondenterna delger oss sina åsikter och kunskaper. Vi har dock med frågor om vad Denscombe (2000) kallar faktisk information, då vi även frågar efter elevernas kön, skola och gymnasieprogram. Med faktisk information menar han information som inte kräver mycket ifråga om bedömningar eller personliga åsikter från respondentens sida. Med andra ord är det ren fakta, om nu respondenten väljer att svara ärligt.

Eftersom enkäter har en tendens att vara engångsföreteelser, har forskaren stor press på sig att få frågorna rätt redan från början. Det är inte vanligt att man kan gå tillbaka och fråga om respondenterna kan besvara en ny enkät med förbättrade frågor. Detta har i sin tur lett till att vi jobbat ganska intensivt med att få fram så bra frågor som möjligt, genom att revidera de frågor vi fått negativ respons på, av vår handledare.

I vår enkät har vi valt att använda oss av både öppna och fasta frågor. Med öppna frågor menar vi sådana som låter respondenterna formulera svaret på egen hand. De bestämmer själv hur långt svaret ska vara, och vad det ska innehålla.

Med fasta frågor menar vi att respondenterna endast kan svara med fasta svarsalternativ såsom ja och nej på de frågor vi ställt. Väljs dessutom ett jämnt antal svarsalternativ tvingar du respondenten till att välja. Hon/han kan inte välja den smidiga medelvägen lagom eller ibland. Fördelen med fasta frågor är att de låter sig kvantifieras och jämföras. ”Det är förkodad data som låter sig analyseras på ett lättare sätt” (Denscombe 2000, s.123).

För att få svar på om eleverna förstår och ser kopplingen till vardagen valde vi enkät som metod. Vi skickade ut vår enkät till tre skolor med totalt fyra grupper i norra Skåne och i Småland. Tyvärr fick vi inte den respons som vi väntat oss, vilket till stora delar beror på hög arbetsbelastning vid enkätens genomförande strax före jullovet, vilket gjorde att vi bestämde oss för att kontakta ytterligare en skola efter jullovet. En lärare upplevde också enkäten som svår trots att vi varit ytterst noggranna i våra formuleringar för att det inte skulle vara några tveksamheter om vad vi frågade om, vilket det ändå visade sig vara på ett par av frågorna.

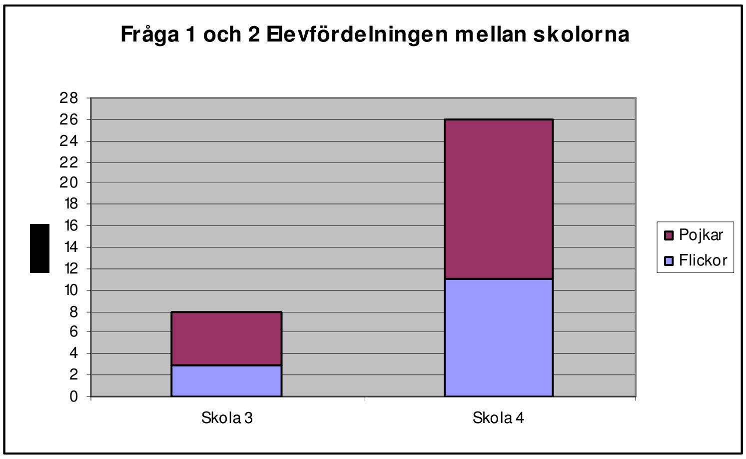
I efterhand funderade vi över om vi hade fått in fler svar om vi hade ha låtit fler personer ta del av våra enkätfrågor, för att se vad de tyckte och hur de uppfattade dem, innan vi lämnade ut dem, men vi kom fram till att det inte hade hjälpt eftersom det är ämnet i sig själv som är svårt och då kan även frågorna uppfattas som svåra. Den upplevda svårigheten kan även bero på att det formella matematiska språket som används ska kopplas samman med vardagen.

Nu i efterhand kan vi konstatera att vi kanske skulle ha valt intervjuer istället och fått ett större djup i studien, men då hade vi troligen inte kunnat se de språkliga barriärer som vi nu har funnit prov på, eftersom man anpassar språket efter den man talar med. Märker man att man talar på ett sätt som den intervjuade inte förstår anpassar du ordvalet så att den intervjuade förstår, vilket innebär att de inte får identiska frågor. Enkäterna ger därför en bättre bild av deras verkliga kunskap eftersom deras läroböcker inte heller anpassar sig efter deras kunskap.

4.2 Resultat

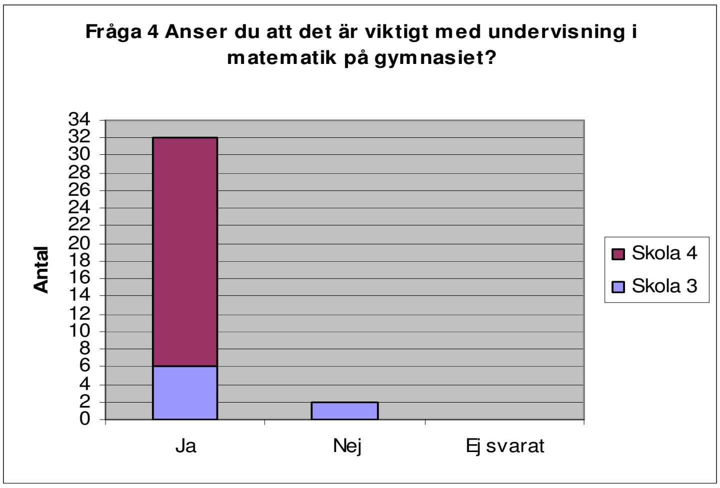
Totalt sett fick vi inte den respons på vår enkät som vi förväntade oss, utan endast en av fyra grupper besvarade den, vilket gjorde att vi tog kontakt med ytterligare en skola. De hade en klass som var villiga att ställa upp. Vi fick alltså enkäterna besvarade av två grupper från två olika skolor i norra Skåne, vilket innebär att vi har en något för låg svarsfrekvens för att kunna dra allmänna slutsatser, men precis som Ejvegård (2003) skriver så kan vi inte bearbeta enkäten statistiskt, men däremot kan den ge många viktiga upplysningar ändå. Eftersom alla elever i de här två klasserna besvarade enkäten innebär det att resultaten som presenteras gäller för den här gruppen elever, men vi kan inte dra några generella slutsatser för gymnasieelever som läser Ma C. På grund av den låga svarsfrekvensen på lärarenkäten har vi valt att låta den utgå ur studien, eftersom läraren som svarade inte undervisade någon av eleverna som svarade, vilket innebär att den undersökningen saknar relevans för vårt arbete.

4.2.1 Resultat av elevenkäten



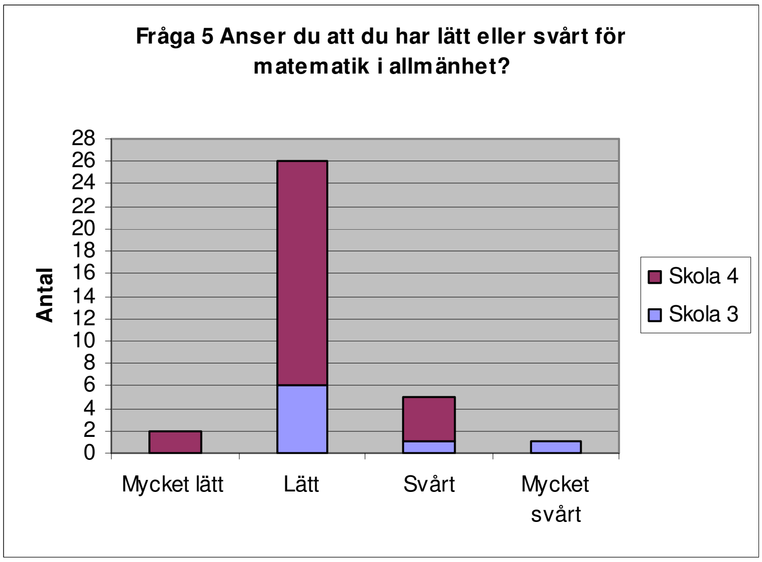
Figur 2 Elevfördelningen mellan skolorna

De första frågorna gav faktisk information om kön, skola och gymnasieprogram (fig. 2). Den första elevgruppen från skola 3 består av åtta elever, som går följande program; IT-media, entreprenör och IT, eftersom matematik C är ett valfritt ämne på dessa linjer och därmed enbart läses av intresserade elever. Den andra elevgruppen från skola 4 består av 26 elever som alla läser naturvetenskapliga programmet.



Figur 3 Är matematikundervisningen viktig?

I fråga 4 ville vi att eleverna skulle besvara om de anser att det är viktigt med matematikundervisning på gymnasiet. Som vi kan se i figur 3 så anser nästan alla elever att matematikundervisningen är viktig. Det är endast två elever som inte anser detta.



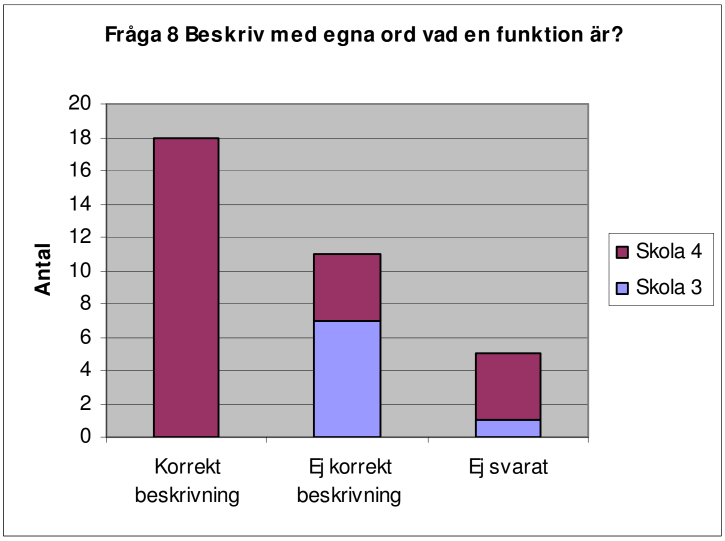
Figur 4 Elevernas uppfattning om sin matematiska förmåga

På fråga nr 5, om eleverna tycker att de har lätt eller svårt för matematik, (fig. 4), svarade två elever att de anser sig ha mycket lätt för matematik och merparten, 26 elever anser sig ha lätt för matematik. Fem elever anser sig ha svårt och en elev anser sig ha mycket svårt för matematik.

De följande frågorna var mer matematiskt inriktade.

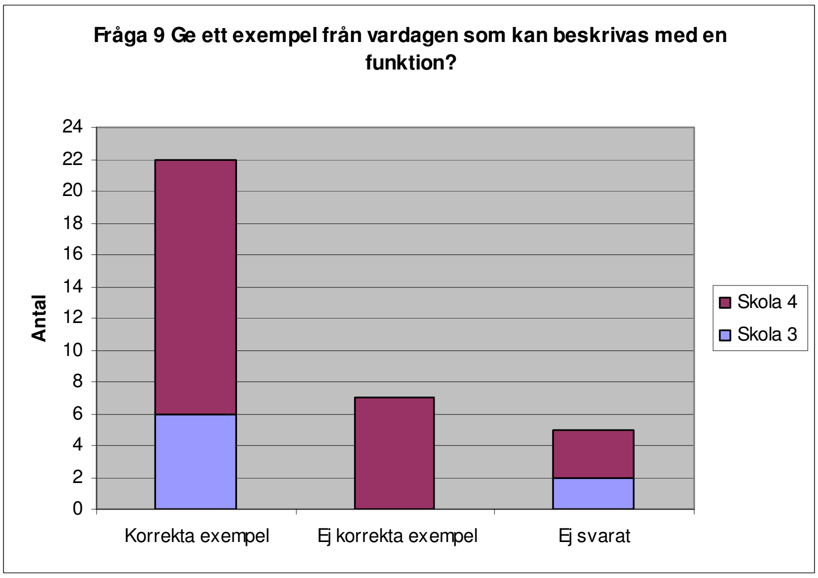
På fråga nr 6, där de fick se derivatans definition, svarade sju respektive 19 elever rätt, varav tolv elever även har angivit fler svarsalternativ som rätt. Derivatan kan även ses som en funktion, vilket gör att vi även har godkänt detta svar som rätt. Fyra av eleverna har däremot svarat rätt med derivatans definition men även angivit andra alternativ som är helt felaktiga, och då återstår åtta elever som har svarat helt fel.

På fråga nr 7, där eleverna fick se en funktion, svarade fem respektive tio elever helt rätt, medan en respektive 16 elever garderade med att ange olika svarsalternativ tillsammans med det rätta, och två elever från skola 3 var helt säkra på att det var en ekvation, vilket är fel.



Figur 5 Svarsfördelningen över vad en funktion är

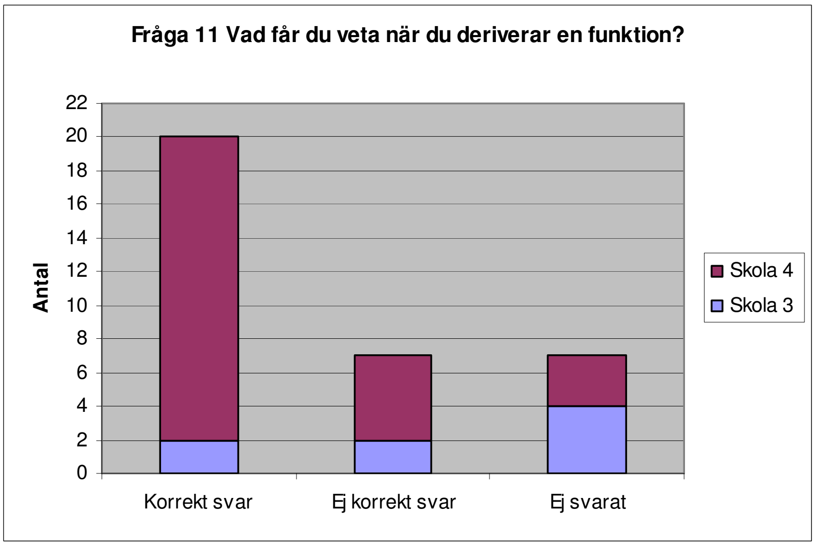
På fråga nr 8 som var en öppen fråga där eleverna med egna ord skulle beskriva vad en funktion är, (fig. 5) gav 18 elever från skola 4 en korrekt beskrivning, medan inga elever alls från skola 3 gjorde det. De flesta elever var överens om att en funktion är en ”matematisk beskrivning som visar hur ett värde beror av ett eller flera andra värden” eller ”en formel som bestämmer *y* vid olika värden på *x*”. Elva elever svarade felaktigt med till exempel ”ett sätt att räkna ut en storhet eller något”, ” ett hjälpmedel för att underlätta beräkningar” eller ”en variabel med olika värde”. Fem elever valde att inte alls besvara på frågan.



Figur 6 Elevernas förmåga att ge exempel på vad som kan beskrivas med funktioner

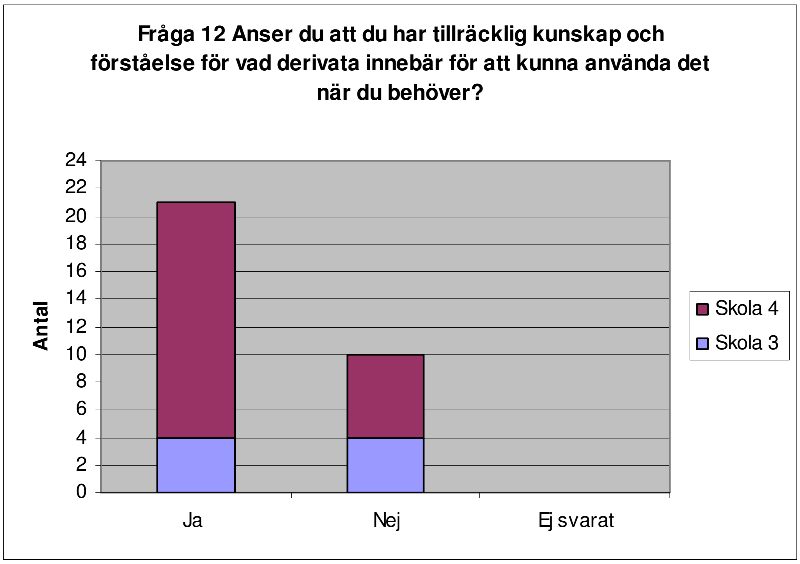
På fråga nr 9, där eleverna skulle ge ett exempel från vardagen som kan beskrivas med en funktion, svarade sex respektive sexton elever bra med enkla exempel från vardagen. Några exempel är: Hur mycket pengar man tjänar beroende hur länge man arbetar, hur många liter mjölk man kan köpa för sina pengar, hur ett företags budget varierar över tiden och bränsleåtgången för en bil. Som vi kan se i figur 6 så gav sju elever felaktiga exempel och fem elever avstod från att svara.

På fråga nr 10, där eleverna med egna ord skulle beskriva vad derivering innebär, svarade en respektive åtta elever rätt, med exempel som ”förändringshastigheten i en viss punkt” och fjorton elever från skola 4 var inne på rätt spår men gav ändå inte alldeles korrekta svar. Några exempel är ”man tar reda på den momentana lutningen i en graf”, ”en ekvations förändringshastighet”, ”ett värde i en specifik punkt”. En elev svarade ”att jag är duktig på matte om jag kan derivera” och elva elever avstod från att svara.



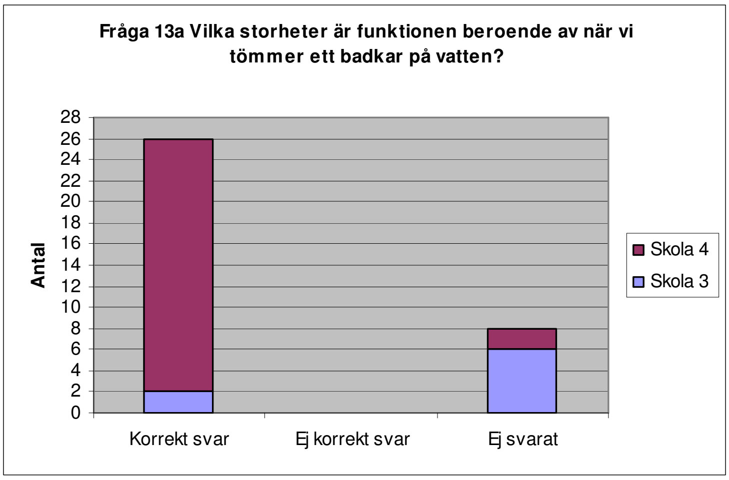
Figur 7 Elevernas förmåga att besvara vad de får veta vid derivering

På fråga 11, (fig. 7), syns elevernas förmåga att besvara vad som blir resultatet vid en derivering. Totalt svarade 20 elever rätt med exempel som ”förändringshastighet”, ”ändringshastigheten av funktionsvärdet under ett visst intervall” eller ”momentan lutning”. Sju elever gav felaktiga exempel och sju andra valde att inte svara.

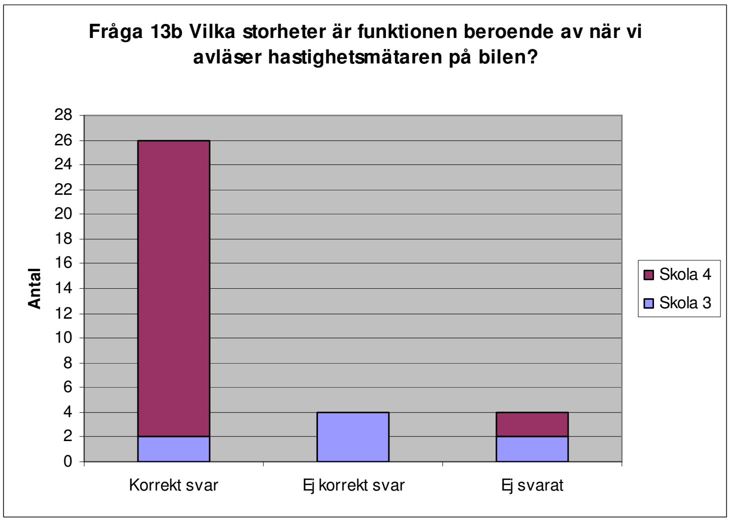


Figur 8 Anser eleverna sig ha tillräcklig kunskap om derivata

På fråga nr 12, där eleverna skulle medge om de har tillräckligt med kunskap för att förstå vad derivatan är och när man använder den, svarade 21 elever att de har tillräckligt med kunskap för detta, medan tio svarade nekande och tre elever tyckte att de befinner sig i något mellanläge kunskapsmässigt.



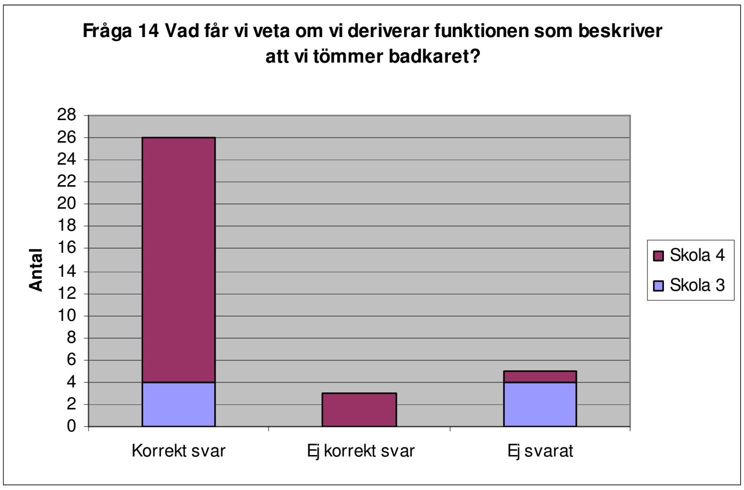
Figur 9 Elevernas förmåga att besvara vilka storheter badkarstömning beror på



Figur 10 Elevernas förmåga att besvara vilka storheter hastighetsmätaren beror på

Formuleringen av fråga 13 är lite diffus. Ett faktum som leder till att eleverna kan svara olika och ändå kan alla svar vara rätt. Vi har inte preciserat vilken funktion underfrågorna handlar om. Första underfrågan (fig. 9) handlade om vilka storheter som funktionen är beroende av när vi tömmer ett badkar. Två elever från skolan 3 har svarat rätt på första underfrågan, som till exempel: tid och volym. Sex elever från skolan 3 har inte svarat på frågan. Två elever från skolan 4 har inte svarat på frågan, medan resterande 24 har svarat rätt, som till exempel: ”hur många m^3 vatten som rinner ut under en tid t”, ”vattenvolymen+tid”, ”vattenmängd”, ”dm^3/min” och ”vattenvolym”. Några elever svarade endast symboliskt med symbolen för hastighet v och symbolen för volym V, som till exempel: ”V,v”.

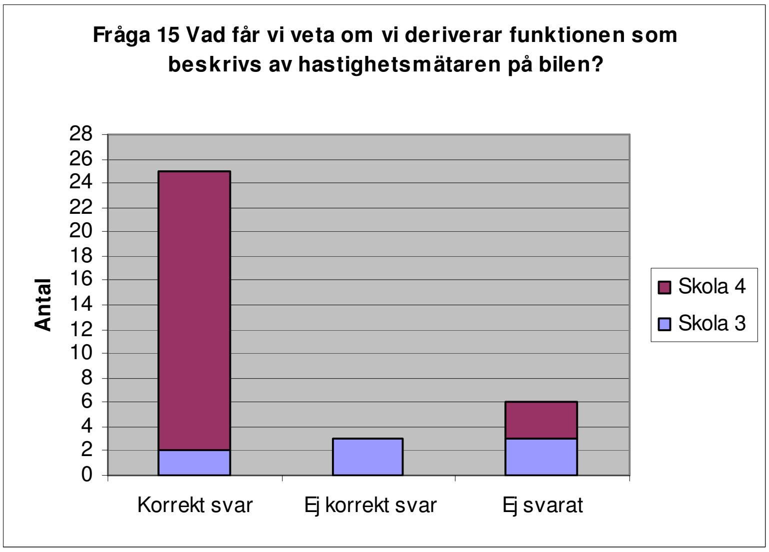
På den andra underfrågan (fig. 10) som handlade om vilka storheter som funktionen är beroende av då vi avläser hastighetsmätaren på bilen, svarade endast två elever från skola 3 rätt. De svarade med ” sträckan och tiden”. Fyra av eleverna svarade inte med rätt alternativ och två svarade inte alls på frågan. 15 elever från skolan 4 svarade med ”sträcka och tid” och nio elever svarade enbart symboliskt med ”m/s” eller ”km/h”, som båda representerar en hastighet. Här är det lite oklart vad eleverna menade. Vi kan tolka det som en hastighet (vilket vi anser är troligast) eller som sträcka och tid representerade av enheterna som står för sträckan km och m, och för tid h och s. Om eleverna menade att det är en hastighet kan vi dra slutsatsen att de inte har förstått frågan eftersom det var hela nio stycken som svarade likadant. Två elever svarade inte på frågan.



Figur 11 Elevernas förmåga att besvara vad vi får om vi deriverar funktionen som beskriver badkarstömningen

Fråga 14, (fig.11) är en följdfråga till första underfrågan i fråga 13. Om man deriverar funktionen som beskriver tömningen av badkaret, får man en förändring av en eller flera av storheterna beroende av tiden. Beroende på vilken storhet som man väljer att derivera med avseende på tiden så får vi olika svar. En elev från skolan 3 svarade med ”förändringen av vattennivå beroende på tid” (alltså en hastighet som beskriver hur snabbt vattennivån sjunker, höjd/tid), medan tre elever svarade med ”hur snabbt badkaret töms” (en hastighet alltså). Fyra elever svarade inte på frågan.

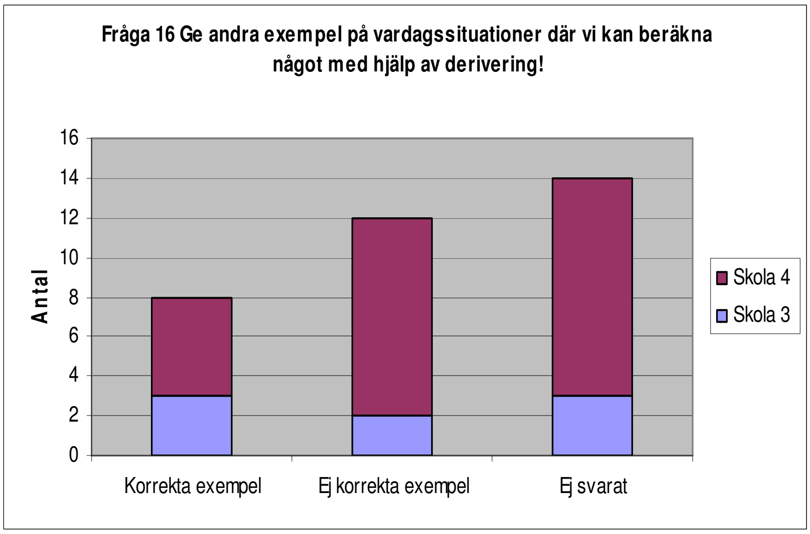
22 elever från skolan 4 har svarat med till exempel ”hastigheten som vattnet har i ett visst ögonblick”, ”hur snabbt vattnet rinner ut beroende på trycket” (detta är en andraderivata till funktionen som beskriver hastigheten, vattnet rinner = innebär en hastighet, hur snabbt = är en förändring i hastigheten). Tre elever har svarat fel och en elev har inte svarat på frågan.



Figur 12 Elevernas förmåga att besvara vad vi får om vi deriverar funktionen som beskrivs av bilens hastighetsmätare

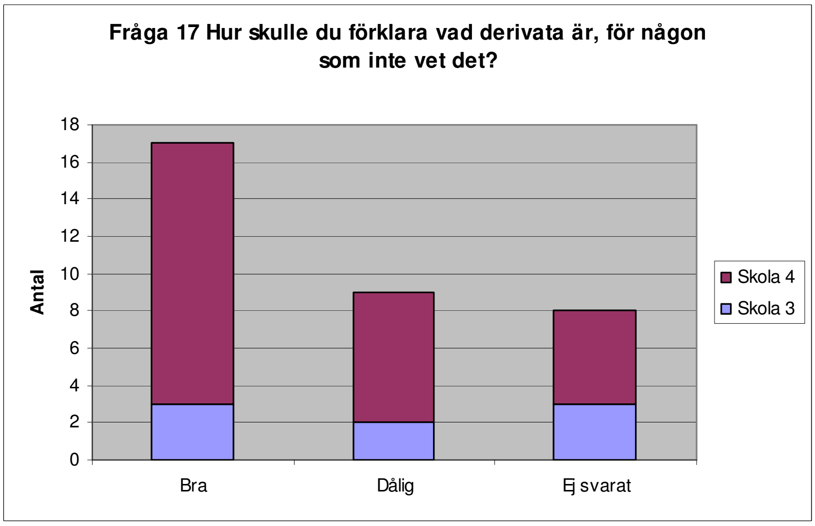
Fråga 15 (fig. 12) är en följdfråga till den andra underfrågan på frågan nr 13. Om man deriverar funktionen som beskrivs av hastighetsmätaren på en bil, så beror svaret man får på om man deriverar funktionen som beror av sträcka och tid, då får vi en hastighet, men anser vi att funktionen är beroende av en hastighet och tiden så får man förändringen av hastigheten vid en viss tidpunkt, vilket är bilens acceleration. Detta innebär att frågan inte är tillräckligt klart formulerad och båda svaren måste godkännas som rätt. Två elever från skolan 3 svarade med ”förändringen av hastigheten beroende på tid” och med ”acceleration”. Tre elever svarade med ” hur snabbt man kör” och tre elever svarade inte på frågan.

14 elever från skolan 4 har svarat med ”acceleration” och ”hastighetsförändringen vid ett speciellt ögonblick”. Nio elever har svarat med ”momenthastigheten” och ”hastigheten vid en viss tidpunkt”. Tre elever har inte svarat på frågan.



Figur 13 Elevernas förmåga att ge exempel från vardagen som är kopplade till derivata

På fråga nr 16, där eleverna själva skulle ge exempel på vardagssituationer där man kan använda derivering (fig.13), svarade åtta elever med bra exempel, tolv elever svarade med felaktiga exempel och 14 svarade inte alls. Exempel från eleverna är följande: bakteriers tillväxthastighet och hur företagets ekonomi förändras i vissa tidpunkter.



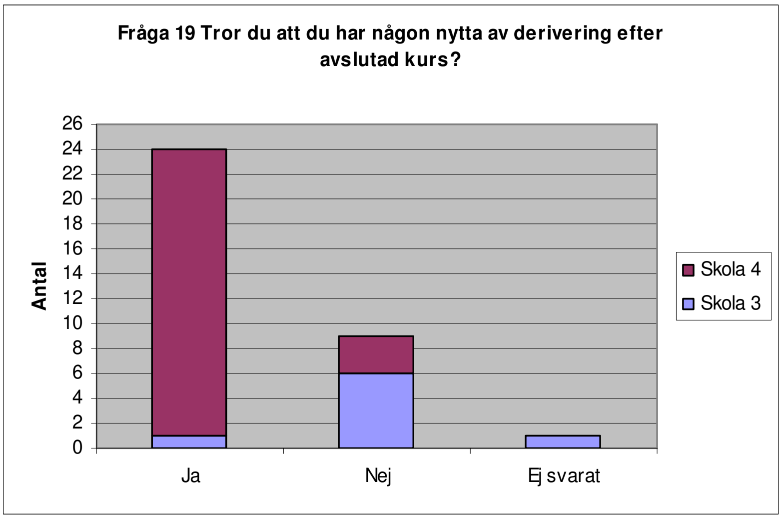
Figur 14 Hur bra eleverna kan förklara vad derivata är

På fråga nr 17, där eleverna med egna ord skulle förklara vad derivatan är, för någon som inte vet (fig. 14), svarade 17 elever bra; att ”det är förändringen i en viss punkt, vid ett visst tillfälle”, ”det är förändringshastigheten i en viss punkt” eller bara ”förändringshastigheten”. Nio elever gav felaktiga förklaringar och åtta elever försökte inte ens att förklara vad derivata innebär.

Fråga 18	Mycket lätt	Lätt	Svår	Mycket svår	Ej svarat
Derivatans definition	2	18	13	1	0
Beräkna derivatan utifrån en graf	9	20	3	1	1
Numerisk derivering	5	17	9	2	1
Tolka den grafiska beskrivningen	3	16	11	2	2
Beskriva derivatan med en teckentabell	2	13	14	4	1
Konkav uppåt och konkav neråt	2	13	9	3	7
Betydelsen av extrempunkterna (max, min och terrass)	2	19	8	2	3
Deriveringsregler för polynom	4	17	6	4	3
Deriveringsregler för trigonometriska funktioner	1	8	13	5	7
Deriveringsregler för sammansatta funktioner	1	2	14	3	5
Deriveringsregler för produkter	2	9	11	3	9
Deriveringsregler för kvoter	1	9	12	3	9
Att förstå när derivering ska användas (tillämpningar)	1	20	9	4	0
Se kopplingen mellan derivatan och vardagen	2	18	12	2	0

Figur 15 Vad eleverna tycker om svårighetsgraden hos de olika kursmomenten

På frågan nr 18, som åter är en fast fråga, där eleverna skulle ringa in svårighetsgraden av olika matematiska begrepp, svarade alla elever på de flesta frågorna. Tyvärr kan vi inte dra några slutsatser utifrån elevernas svar på denna fråga med underfrågor då det har visat sig att alla momenten inte har gåtts igenom, vilket gör att eleverna har svarat på något som de inte vet. Vi har många som avstått från att svara men sannolikt finns det även elever som har svarat utan att egentligen veta vad de svarat på. Svaren kan man betrakta i figur 15.

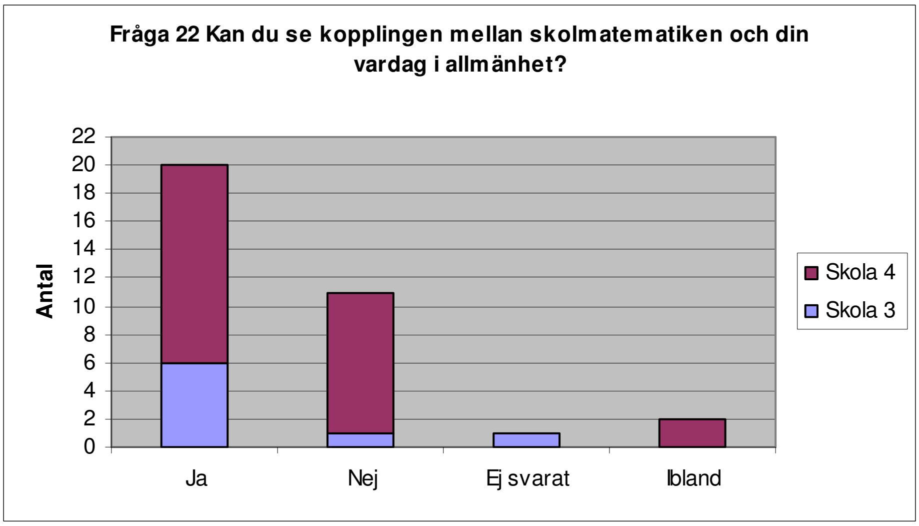


Figur 16 Om de kan se nyttan av derivering

På fråga nr 19, som är en öppen fråga, där eleverna skulle svara om de ser nyttan med att kunna derivera efter kursen (fig.16), svarade endast en elev från skolan 3 att hon/han ser nyttan av att kunna derivera efter avslutad kurs, medan 23 elever från skolan 4 gör det. En av eleverna från skola 4 som svarade positivt, svarade med ” ja, eftersom jag kommer att studera vidare, men INGEN nytta i vardagen”. Nio elever svarade att de inte kan se nyttan med derivering och en elev avstod från att svara.

På fråga nr 20, som är en öppen fråga, där eleverna skulle svara på varför de tror att de ska kunna derivera, svarade tre elever från skolan 3 med bland annat att ”det står i kursplanen”, eller ”det behövs för att avsluta kursen”. Tre elever vet inte och två avstod från att svar. Eleverna från skolan 4 var mer positiva, 20 elever svarar med bra anledningar. Några exempel är ”kunna använda det i fortsatta studier”, ”för att lättare kunna förstå hur saker fungerar, till exempel hur snabbt en bil accelererar” och ”att förstå förändringar”. Det är tre elever från skolan 4 som inte vet varför de lär sig derivera och tre elever valde att inte svara på frågan.

På fråga nr 21, där eleverna skulle berätta vem som hjälpt dem att förstå derivering, svarade 23 elever att det var matteläraren, åtta elever svarade med: självstudier, föräldrar eller kompisar. Två elever svarade inte alls på frågan och en elev svarade med en fråga: ”Vem sa att jag har förstått det?”.



Figur 17 Kan eleverna se kopplingen mellan vardagen och matematiken i allmänhet

På fråga nr 22, som är en öppen fråga, där eleverna skulle svara på om de ser kopplingen mellan skolmatematiken och vardagen i allmänhet (fig. 17), svarade 20 elever positivt medan elva elever inte kan se någon koppling alls och två elever svarade inte alls. Sedan har vi två elever som har lagt till svarsalternativet ibland.

På frågan nr 23, som är en öppen fråga, där eleverna skulle skriva om det fanns något de vill tillägga, svarade endast sju elever. De tre elever från skola 3 som svarade tyckte att frågorna var svåra och språket var svårt att förstå. Två av eleverna från skola 4 tycker inte att de kan så mycket om just den här delen inom matematiken trots att de förut har presterat bättre med MVG i betyg. En elev tyckte att det borde ha funnits fler svarsalternativ på en del av frågorna och en elev önskade oss lycka till.

4.3 Analys

Vi har valt att analysera resultatet genom att välja ut fyra elever efter en grov indelning beroende på deras svar och sedan kombinera detta med hur frågorna är kopplade till varandra.

4.3.1 Indelning utifrån elevernas svar

För att få ett djupare perspektiv på om eleverna har förförståelsen eller ej och vidare den relationella förståelse av funktioner och derivata grupperar vi nu eleverna utifrån deras svar på fråga 6-11. Deras svar kan läsas i bilaga 3. Vi har gjort en grovindelning av eleverna beroende på att en del av deras svar ligger i ett gränsland mellan korrekta och ej korrekta svar. De flesta elever uppvisar nämligen svårigheter att uttrycka sig matematiskt korrekt för att direkt kvalificera sig för ett korrekt svar, men deras svar tyder ända på att de har förstått ganska bra. Utifrån den här grovindelningen har vi sedan valt ut fyra elever utifrån om de har förförståelse eller ej och om de har förstått derivata eller ej och kombinerat dessa kriterier. Vi börjar med en grupp om åtta elever som uppvisar de kunskaper som vi vill att alla elever ska få med, nämligen både relationella förkunskaper om funktioner och relationella kunskaper om derivata. Denna grupp representeras av elev 4T. Sedan har vi valt ut 4Å från en grupp om tolv elever som uppvisar förkunskaper men inte har förstått deriveringen fullt ut och alltså inte har fullständig relationell förståelse och 4K ur en grupp om fem elever som inte riktigt har förkunskaperna men trots detta uppvisar en del kunskaper om derivata. Till sist valde vi även elev 3D ur en grupp om nio elever som visar sporadiska kunskaper men inga tydliga kunskaper inom något område, varken förkunskaper eller om derivata. Därefter följde vi upp de här eleverna med deras svar även på frågorna 12-18.

4.3.2 Inledningsfrågorna

Vi har två grupper som svarade på vår enkät. Läraren på skola 3 beskriver sin grupp om åtta elever som en duktig grupp och sedan har vi gruppen från skola 4 med 26 elever. Av dessa anser sex elever från skola 3 att det är viktigt med matematikundervisning i skolan. Samma sex elever anser sig ha lätt för matematik. Alla elever från skola 4 anser att matematikundervisningen är viktig och de flesta av dessa elever anser sig även ha lätt för matematik. Här kan vi se att intresset och motivationen att lära sig ett ämne sammanfaller med hur lätt eller svårt eleverna anser sig ha för ämnet. Detta innebär enligt Skemp (1978) och Löwing (2002) att de här eleverna har utvecklat en självkänsla, av att de kan och förstår sig på ämnet. Detta är ett faktum som ger eleverna motivation för vidare inlärning av matematik.

4.3.3 Förförståelse

En av grundstolparna för att kunna förstå derivata är enligt Tall (1985) att eleverna vet vad en funktion är och kan rita och tolka olika funktioner med hjälp av grafer. Tittar vi då på resultatet för fråga 7 till 9 som skulle ge oss svar på huruvida eleverna har någon förförståelse av funktioner, kan vi se att nästan alla vet att det är en funktion, men sedan tror 17 elever även att det är något mer svarsalternativ som är rätt, vilket vi kan se hos både elev 4K och 4Å. Det mest frekventa garderingsalternativet är ekvation vilket visar att deras begreppsbilder (Davis & Tall, 2002) rymmer kopplingar till andra begrepp som är närbesläktade men inte korrekta. Det är endast två elever från skola 3 som har alldeles fel för sig.

När de ska beskriva en funktion med egna ord är det ingen från skola 3 men 18 elever från skola 4 som klarar av att ge en korrekt beskrivning, vilket innebär att de inte har någon tydlig begreppsbild av funktioner. Detta syns tydligt om vi följer elev 4K´s svar: ”en funktion är en variabel med olika värde”. Däremot kan eleverna från skola 3 ge exempel från vardagen som kan beskrivas med en funktion. Frågan blir nu om vi kan säga att de har vad Skemp (1978) kallar relationell förståelse eller enbart instrumentell förståelse för funktioner.

Vi kan se att de flesta eleverna har en grundförståelse för vad en funktion är och vad i vardagen som går att beskriva med en funktion, men att eleverna från skola 3 till exempel elev 3D med svaret: ”en ekvation som man kan använda för att se ett förhållande mellan olika tal”, inte med egna ord kan beskriva vad en funktion är. Detta tyder på att de mest har en instrumentell förståelse och inte den eftersträvade relationella. Detta kan bero på det Gunnarsson (2006) kallar mental blockering för språkliga förklaringar eller vad Berggren och Ekblad (2006) menar är krockar mellan vardagsspråket och det matematiska språket, vilket sammanfaller med Löwings (2002) tolkning att eleverna får för lite träning i vad begreppen innebär och därmed ingen tydlig begreppsbild, vilket får till följd att de inte kan beskriva matematiska begrepp med egna ord.

Resultatet visar samtidigt att de vet hur en funktion beskrivs matematiskt och vad den kan beskriva i verkligheten så det som saknas för relationell förståelse är bron mellan dessa, vilket skulle kunna avhjälpas med det som Tall (1985) förespråkar, en mer praktisk och experimentell inledning till kapitlet där gester med kroppen ingår, vilket Hähkiöniemi (2006) har funnit är bra för att förstärka förståelsen, eller att använda sig av begreppskartor som Grevholm (2005) förespråkar, tillsammans med Tall och Davis´s (2002) scheman och begreppsbilder för att tydligare synliggöra sambanden mellan olika begrepp och dess innebörder.

Zandiehs (2000) studie visar också att för att kunna få en komplett förståelse av derivata, måste varje enskilt begrepp som är inblandat i derivatan vara förstått för att du ska kunna förstå derivering. Vi kan här se att det är mycket stora skillnader mellan vad eleverna från de båda skolorna har för förförståelse till derivatan. Beror detta på att eleverna från skola 4 har ett annat krav från sin utbildning om att de ska klara kursen då denna är obligatorisk på skola 4 men frivillig på skola 3 eller på att de har större motivation? Har detta fått till följd att lärarna på skola 4 är mer noggranna med att lägga bra grunder hos sina elever eftersom de vet att flera av dem kommer att behöva kunskapen för fortsatta studier?

4.3.4 Förståelse av derivatabegreppet

Vi fortsätter med att analysera resultaten på frågorna 6, 10-12 och 17.

Skemp (1978) säger att vi låter eleverna tro att de kan momentet genom att de får bra resultat på proven, men dessa visar egentligen inte om de fått relationell förståelse eller om de enbart besitter instrumentell förståelse, vilken oftast är den enda som testas.

Av de 26 elever som känner igen derivatans definition finns både elev 4T och 4Å, men av dessa 26 elever har åtta elever även gett funktion som svar och ytterligare fyra elever, däribland elev 4K, garderar sig med andra felaktiga svar. Att dessa elever även svarar att det är en funktion, kan bero på att ”*f*” används som symbol för en funktion, vilket gör att de också upplever derivatans definition som en funktion. Deras begreppsbild för derivatan är ännu inte komplett och tillräckligt avgränsad utan de sammanblandar begreppet med tidigare moment som de behöver behärska för att kunna utveckla en tydlig begreppsbild för det nya – derivata. Enligt Löwing (2002) så ska skolan ge eleverna en abstrakt och koncentrerad kunskap. Hon menar vidare att eleverna inte kan överföra och använda tankemodeller förvärvade i en situation till en annan. Det kan vi se här genom att vi blandat frågor som har med funktioner och derivering att göra och i skolan har de oftast momenten separerade och i en gradvis stegring av svårigheten, medan våra frågor kräver att de kan identifiera det de har lärt sig utan att veta hur det är kopplat till varandra. Detta tyder på att eleverna som deltog i vår undersökning har en viss instrumentell förståelse, eftersom de kan identifiera formeln för derivatans definition ganska bra, men de har definitivt inte en tydlig begreppsbild av derivatan. Att den instrumentella förståelsen är högre kan vi också se då 21 elever anser sig ha tillräcklig kunskap för att förstå derivatans innebörd och när den ska användas, samtidigt som endast nio elever kan beskriva vad derivering innebär. När vi istället ber dem att beskriva vad de får vid derivering och vad derivata är, för någon som inte vet, går det lite bättre och 20 respektive 17 elever klarar av att ge korrekta svar. Innebär detta att vi lärare invaggar eleverna i en falsk trygghet i att de kan, för att eleverna ska slippa att misslyckas, eller av vana, tradition eller lättja och vad leder detta till i förlängningen? Leder det till elever med bra självförtroende, men med dåliga kunskaper och dålig självinsikt i vad de kan, eller?

Fråga 11 kräver mer av matematisk korrekthet än vad fråga 17 även om själva grunden i frågan är densamma. Här ser vi åter igen prov på det glapp som finns mellan elevernas förståelse av det matematiska språkets stringens och vardagsspråket och deras hantering av dessa. Elev 4T ger sammantaget ett bra svar medan eleverna 3D, 4K, 4Å anger svar som hör ihop med derivata men som inte ger en fullständig bild av vad derivata är – de saknar en tydlig begreppsbild av derivata. Detta ger tydliga indikationer på det Viholainen (2006) menar, nämligen att de använder det de är mest säkra på och att de inte har någon tydlig begreppsförståelse för derivatans innebörd. I förståelse spelar språket en avgörande roll och enligt Tall och Davis (2002) så är matematikböckerna genomsyrade av diffusa ord och symboler och definitioner som är stela och tråkiga. Med ett oklart språk kan eleverna inte se något samband med den verklighet de lever i eller se det i en större matematisk helhet. Vilket enligt Löwing (2002) beror på att eleverna inte har fått de förklaringar, både på ett vardagsnära sätt och med ett mer formellt matematiskt språk, som de behöver. Löwing menar att detta krävs för att eleverna ska kunna förstå innebörden i begreppen och för att de ska kunna bygga upp en tydlig matematisk definition. Detta kan underlättas av scheman och begreppsbilder som förespråkas av Tall och Davis (2002), vilka sedan kan kopplas samman i begreppskartorna (Grevholm, 2005) för att få ett sammanhang och en koppling mellan alla begrepp.

4.3.5 Ser de kopplingen till vardagen

Analys av fråga 13-16.

Dessa frågor hade vi tänkt skulle visa om eleverna kunde se kopplingen mellan skolans matematik och sin vardag. Vi tyckte att vi hade formulerat frågorna tydligt och klart men när vi skulle analysera deras svar visar det sig att frågorna trots allt har gått att tolka lite olika vilket gör att vi inte riktigt kan se det vi hade tänkt oss. Vi tänkte att de först skulle tala om vilka storheter funktionen beror av och sedan tala om vad derivatan av den här funktionen beskriver, men eleverna har svarat helt separat eftersom de kan svara att funktionen är beroende av sträcka och tid och sedan säga att derivatan är acceleration, vilken i det här fallet är andraderivatan till funktionen. Det vi kan se är att eleverna har svårt att beskriva vardagen med hjälp av matematik. Detta tyder enligt Hähkiöniemi (2006) på att eleverna ser derivatan som en räkneprocess med en massa regler och inte som en process ute i verkligheten. En annan orsak, till att eleverna svara som de gör, skulle kunna vara att de inte har förstått vad vi avser med storhet, vilket i så fall är ett språkligt hinder för förståelsen, men det kan också vara så att de inte alls ser koppling mellan dessa vardagliga händelser och det som vi kan beskriva och räkna med i matematiken. Jämför vi detta med böckernas upplägg så ser vi att dessa mest fokuserar på den instrumentella förståelsen, även om de använder exempel och övningar från vardagen, så är det ändå tal som räknas fram och som går att rätta i facit. Hellrups (2004) fallstudie som är gjord på tre lärare visar på samma sak, nämligen att den mesta tiden läggs på den instrumentella förståelsen då endast en av dessa lärare lägger tid på att diskutera de nya ordens innebörd och betydelse för vardagen, vilket tyder på det som Löwing (2002) menar är så viktigt, nämligen att matematiska begrepp diskuteras och förklaras så att alla förstår, för att få kopplingen till vad begreppen egentligen betyder och symboliserar. Tall (1985) säger att eleverna måste få helheten för att kunna utveckla varaktig relationell förståelse, vilket de kan få om de kan binda matematikens begrepp till verkligheten.

4.3.6 *Elevernas upplevelse av svårighetsgraden*

I fråga 18 ville vi se hur de uppfattade svårighetsgraden i olika kursmoment. Det går inte att dra några klara slutsatser om eleverna har lättare för den instrumentella förståelsen än för den relationella då svaren som eleverna lämnar variera kraftigt mellan att de tycker att det instrumentella är mycket lätt till mycket svårt beroende på vilket moment det avser. De enda moment som visar sig vara något lättare för eleverna att förstå är de som innehåller en grafisk framställning, vilket strider mot vad Aspinwall, Shaw och Presmeg (1997) har kommit fram till. De har funnit att eleverna har lättare för att förstå derivata om bilder undviks i förklaringar, eftersom bilder är konstruerade och föreställande, vilket gör att eleverna kan hålla kvar vid felaktig kunskap längre. Om så är fallet här kan vi inte avgöra, utan det vi kan se är att eleverna upplever momenten med bilder som lättare.

Att eleverna uppfattar många moment som svåra kan också bero på att allt som är nytt känns mycket svårare och att de saknar grundläggande algebraiska kunskaper för att klara av det nya. Det kan även bero på att eleverna har haft svårt att tolka vad som ingår i de olika momenten, eftersom de tydligen inte har gått igenom alla avsnitt och det tidigare har visat sig att eleverna har problem med begreppsförståelsen och några elever uppger även i sista frågan att det var en svår enkät med svårt språk. Detta tyder på en ovana i att använda de korrekta matematiska begreppen, men också på att skolan har misslyckats i sitt uppdrag att ge eleverna en abstrakt och koncentrerad kunskap som kan användas för att tolka omvärlden. Här kan vi se resultatet av att kursplanerna inte sammanfaller med läroplanerna. För hur ska eleverna kunna se helheten när inte ens de som styr skolvärlden kan ge gemensamma mål?

4.3.7 *Avslutande frågor*

Två respektive 16 elever anser att det är lätt att se kopplingen mellan skolans matematik och vardagen med avseende på derivata, vilket sammanfaller ganska bra med att 6 respektive 14 elever gör det i allmänhet. Även här kan vi se att eleverna på skola 3 har svårt för derivering och att de därmed upplever att de har lättare för att se kopplingen till vardagen i andra kursmoment. Att inte mer än ungefär hälften av eleverna kan se kopplingen till vardagen tyder på att vi lärare är dåliga på att visa eleverna på sambanden som finns mellan skolmatematiken och vardagen och detta får till följd att eleverna inte kan se nyttan av att kunna derivera, vilket också visar sig när de svarar på vad de tror är anledningen till att de lär sig derivera. Här kan vi åter igen se en mycket stor skillnad mellan skolorna. Eleverna på det naturvetenskapliga programmet svarar att de kan se nyttan av att kunna derivera, vilket många gånger motiveras av att de ska studera vidare och en av anledningarna till att de ska lära sig att derivera är att det krävs för vidare studier. Här kan vi alltså se att eleverna har en stor motivation till att klara av kursen med ett bra resultat. Däremot är det bara en elev från skola 3 som såg nyttan av att kunna derivera och det verkar som om enda anledningen till att eleven läser momentet är att det ingår i kursplanen och att det krävs för att kunna avsluta kursen. De här eleverna saknar i stort sett helt motivationen att läsa om derivatan och ser det nästan som ett tvång istället, vilket gör att de enbart lär sig detta för stunden och egentligen inte frågar efter om de har förstått det eller ej, eftersom de troligen inte kommer att behöva det i vardagen eller i framtiden i alla fall. Detta sammanfaller med vad Löwing (2002) och Wikström (1997) anser, nämligen att eleverna inte ser nyttan eftersom de enbart lär sig att mekaniskt hantera formler, vilket är ett självändamål utan praktisk betydelse. Elevernas svar tyder också på att ingen av de här eleverna är intresserad av att fortsätta läsa matematik på en högre nivå. Hur ska vi som lärare kunna motivera våra elever att fortsätta läsa matematik om de inte förstår varför de läser det och kan se nyttan av att kunna det? Detta stämmer även med Löwings (2002) uppfattning att eleverna enbart är ute efter att klara kursen med minsta möjliga ansträngning. Här kan vi se hur stor betydelse motivationen har för inlärningen.

4.3.8 Sammanfattning av analysen

Vår undersökning visar att eleverna har brister i sin förförståelse, vilket betyder att de inte har alla de grunder som de behöver för att kunna bygga vidare och utveckla sina kunskaper till att omfatta området med derivata. Bristerna består bland annat av språkliga hinder där de inte har tillägnat sig det formella matematiska språket, vilket får till följd att de inte alltid förstår vad de ska göra i uppgiften och att de inte kan ge formella förklaringar på vad olika begrepp innebär. De saknar, vad Tall och Davis (2002) förespråkar, en tydlig begreppsbild av funktioner. Dessa brister i förförståelsen och i språket får till följd att elevernas förståelse av derivata begränsas till den instrumentella, eftersom den kan man oftast klara om man är bra på att manipulera formler och räkna med algoritmer. Eleverna uppvisar också brister i att kunna koppla samman derivata med vardagen, vilket visar att de saknar den av skolverket eftersträvade relationella förståelsen (Skolverket, 2000). En annan intressant iakttagelse är att motivationen har stor betydelse för inlärningen.

5 Slutsatser

Syftet med den här studien har varit att öka kunskapen om, huruvida gymnasieeleverna, som studerar kursen i Ma C, förstår innebörden av begreppet derivata och om de ser koppling mellan den teoretiska matematiken och deras vardag.

Vi är säkra på att vår fråga har stor betydelse för den nuvarande situationen i svenska skolor och för framtida studier i matematikdidaktik. Vår undersökning av de bakomliggande orsakerna till gymnasielevers svårigheter med att förstå derivata och vad som kan vara orsaker till dessa i dagens skolor har lett till att vi har hittat mycket internationellt forskningsmaterial. Precis som Björkqvist (2003) belyser i sin studie, fattas det forskning i Sverige inom metodik och generellt även forskning som är anpassad för svenska förhållanden.

En av matematikens uppgifter är att leverera modeller som ska ge en beskrivning av processer inom natur- och samhällsvetenskaperna. I motsats till en allmän uppfattning sker den matematiska utvecklingen i ett alltmer accelererat tempo och på ett bredare fält än någonsin tidigare (Thompson, 1991). Det är därför av yttersta vikt att eleverna ser kopplingen mellan matematiken och vardagen.

Men vad visar då studien utifrån det vi ville veta – hur uppfattar dagens gymnasieelever innebörden av derivata? Vi kan se att på uppmaningen att beskriva derivatans innebörd med egna ord har merparten svårt för det men när de senare istället uppmanas att beskriva derivatan för en kompis som inte vet så går det betydligt bättre. Första frågan klaras av nio medan andra klaras av sjutton elever vilket är hälften av de tillfrågade. Om vi tittar på elev 4T som är en av de elever som verkar ha relationell förståelse så ser vi även här en liten skillnad i svaret trots att innebörden i frågorna nästan är identisk. På första är svaret: ”att räkna ut ändringshastigheten i ett visst ögonblick t.ex. bilens hastighet efter 15 sekunder” och vid andra tillfället svarar eleven: ”Förändringshastigheten i ett visst ögonblick”. Av detta kan vi dra slutsatsen att hur eleverna svarar på frågan hur de uppfattar innebörden av derivata är mycket beroende av sammanhanget som frågan ställs i och hur frågan ställs, vilket innebär att det inte är alldeles lätt att generalisera ett svar på vår fråga eftersom variationen mellan deras svar är så stor.

Nästa fråga som vi ställde var hur de kopplar derivatan till vardagen och där kan vi se en trend i att de använder exempel som är använda i läroböckerna som till exempel 4K med svaret ”befolkningsökningen”, men det finns även elever som här visar på att de har fått relationell förståelse och kan ge egna exempel som elev 4T med svaret: ”bredbandshastighet”.

Det har alltid funnits en skillnad mellan skolans matematik och vardagen precis som mellan den teoretiska och den praktiska matematiken. Det här glappet mellan teoretisk och praktisk matematik finner Wikström (1997) även mellan skolans läroplan och kursplanerna för matematik. Vår studie antyder att situationen inte har blivit bättre sen dess, utan eleverna har oftast bara den instrumentella förståelsen. Är det denna kunskap som vi vill att våra elever ska ha med sig efter avslutade gymnasiestudier, eller vill vi att de ska ha förstått innebörden och ha gjort begreppen till en egen förståelse? Skolan verkar nämligen inte kunna erbjuda alla eleverna de kunskaper som är formulerade i läroplanen: ”formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för yrkes- och vardagsliv” och ” observera och analysera människans samspel med sin omvärld utifrån ett ekonomiskt och ekologiskt perspektiv” (Lärarboken, s. 49).

De nyare matematikböckerna, Matematik från A till E – gymnasiematematik kurs C (Holmström, 2006) och NT/c+d, Liber Pyramid gymnasiematematik för Naturvetenskaps- och Teknikprogrammen, kurs C och D (Wallin, Lithner, Wiklund och Jakobsson, 2005) har ett upplägg som visar den struktur, som Tall (1985) föreslår för att eleverna ska få den bästa möjliga inlärningen, men i praktiken visade det sig att eleverna trots detta har stora brister när det gäller den relationella förståelsen. Självklart kan vi inte dra några generella slutsatser av vår undersökning eftersom den endast omfattar ett mindre antal elever från två skolor.

Vidare hade vi två underfrågor om vilka eventuella svårigheter eleverna har med att förstå derivata och vilka orsakerna kan vara till dessa. Den största svårigheten för eleverna att förstå derivata, är den rent språkliga. Språket är av stor betydelse och det matematiska språket uppfattas av de flesta eleverna som svårt. Detta beror på att det finns ett stort glapp mellan elevernas vardagsspråk och det mer formella matematiska språket, vilket medför svårigheter i att förstå matematiken i skolan. Enligt Gardner (1992) visar det sig tydligt när uppgifterna som bygger på problemlösning måste formuleras på samma sätt som i kursböckernas inledande avsnitt, eftersom eleverna annars inte kan överföra och använda den förvärvade kunskapen i de nya sammanhangen. Här får vi åter belägg för våra tankar om att det är språket och inte matematiken i sig själv som eleverna har svårt att förstå. Det innebär att det behöver byggas broar mellan elevernas vardagsspråk och matematikens mer stringenta språk. Vi har funnit flera intressanta och möjliga åtgärder för detta. Enligt Löwing (2004) skulle en tydlig matematikdidaktisk teori underlätta undervisningen genom att den skulle ge en helhetssyn på matematikundervisningen i skolan. Den didaktiska teorin skulle då vara formulerad med en tydlig stegring för matematikundervisningen, så att eleverna skulle kunna ha den förväntade förförståelsen när de påbörjar ett nytt avsnitt. Den didaktiska teorin skulle då omfatta både den instrumentella och den relationella förståelsen. Om lärarna dessutom använder sig av det som Tall och Davis (2002) förespråkar i form av scheman och begreppsbilder och hjälper eleverna att bygga upp begreppskartor (Grevholm, 2005), så tror vi att eleverna skulle se en helhet och en struktur i matematikundervisningen. De skulle troligen även se hur de olika matematiska delarna hör ihop på ett sinnrikt sätt och hur de är kopplade till deras vardag. Idag får eleverna de olika matematiska begreppen och formlerna i form av lösa pusselbitar, där lärarna ofta missar att ge dem fogen som skulle kunna sätta samman alla lösa pusselbitar till en större sammanhängande bit. Vilket får till följd att eleverna står där med ett antal pusselbitar utan kopplingar emellan. Hade vi kunnat ge våra elever dessa kopplingar mellan de olika delarna hade vi nått den eftersträvade relationella förståelsen.

Som lärare måste vi hela tiden reflektera över vår lärarroll och vårt uppdrag och hur viktigt det är att vi tar det på allvar och att vi verkligen försöker ge våra elever det som står i styrdokumenten. Då måste vi också våga ställa oss frågan om vi gör rätt eller om vi kan förändra vår undervisning så att fler elever når de uppsatta målen. Vi skulle vilja att vår undersökning fortsatte med djupare studier i elevernas förståelse i förhållande till de metoder som används.

6 Referenslista

Aspinwall, Leslie; Shaw, Kenneth and Presmeg, Norma C. (1997). *Uncontrollable mental imagery: graphical connections between a function and its derivative in Educational* Studies in Mathematics 33. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Berggren, Peter & Ekblad, Fredrik (2006). *Svårigheter med derivata*. Örebro universitet, Pedagogiska institutionen. [C-uppsats] Tillgänglig 2007-11-05: http://www.diva-portal.org/oru/abstract.xsql?dbid=1400

Bjurwill, Christer (2001). *A, B, C och D: vägledning för studenter som skriver akademiska uppsatser*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-01574-7

Björk, Lars-Eric; Borg, Kenneth och Brolin, Hans (1995). *Matematik 2000 för naturvetenskapliga programmet*. Natur och kultur. ISBN 91-27-44076-1

Björkqvist, Ole (2003). *Matematikdidaktiken i Sverige – en lägesbeskrivning av forskningen och utvecklingsarbetet*. Stockholm: Kungliga vetenskapsakademien. Tillgänglig 2007-11-06: http://www.kva.se/KVA_Root/publications/reports/reportmath.pdf

Denscombe, Martin (2000). *Forskningshandboken för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna*. Studentlitteratur. (292 s). ISBN 91-41-01280-2

Ejvegård, Rolf (2003). *Vetenskaplig metod*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-02763-X

Gardner, Howard (1992). *Så tänker barn och så borde skolan undervisa*. Jönköping: Brain Books AB. ISBN 91-89250-04-4

Giere, Ronald (1997). *Understanding Scientific Reasoning*. Fort Worth: Harcourt College Publishers. ISBN 0-15-501625-3

Grevholm, Barbro (2005). Kognitiva *verktyg för lärande i matematik – tankekartor och begreppskartor*. Tillgänglig 2006-12-10: www.caspar.no/tangenten/2005/barbro_grevholm_1_2005.pdf

Gunnarsson, Mikael (2006). *En studie av derivatakunskapen hos gymnasieelever*. Karlstads universitet, Institutionen för matematik. [C-uppsats] Tillgänglig 2007-11-05: www.diva-portal.org/kau/undergraduate/abstract.xsql?dbid=103

Hellrup, Gustav (2004). *Gymnasielärares introduktion av derivata: En studie av tre matematiklärares undervisningsupplägg och vad som påverkar dem*. Linköpings universitet, Matematiska institutionen. [C-uppsats] Tillgänglig 2007-11-05: www.diva-portal.org/diva/getDocument?urn_nbn_se_liu_diva-2382-1__fulltext.pdf

Hellspong, Lennart & Ledin, Per (1997). *Vägar genom texten. Handbok i brukstextanalys*. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-01639-5

Holmström, Martin & Smedhamre, Eva (2006). *Matematik från A till E – gymnasiematematik kurs C*. Falköping: Liber AB, ISBN 91-47-01685-X

Hähkiöniemi, Markus (2006). *The role of representations in learning the derivative.* Jyväskylä: University Printing House. ISBN 951-39-2639-7

Johansson, Bo & Svedner, Per Olof (2001). *Examensarbetet i lärarutbildningen*. Uppsala: Kunskapsföretaget. ISBN 91-89040-36-8

Lund, Jens (2002). *Från tangent till derivata; en historisk överblick*. Bokförlaget KUB Skebobruk. ISBN 91-89104-07-2

Lärarboken (2005) – läroplaner, skollagen, policydokument. ISBN 91-973019-5-7

Löwing, Madeleine (2004). *Matematikundervisningens konkreta gestaltning – En studie av kommunikationen lärare – elev och matematiklektionens didaktiska ramar*. (Göteborg Studies In Educational Sciences 208), Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis ISBN 91-7346-491-0

Löwing, Madeleine (2002). *Ämnesdidaktisk teori för matematikundervisning – Ämneskunskapers relation till individ och omvärld.* IPD-rapport, Göteborgs universitet ISSN 1404-062X

Patel, Runa & Davidson, Bo (2003). *Forskningsmetodikens grunder: att planera, genomföra och rapportera en undersökning*. 3 uppl. Lund: Studentlitteratur. ISBN 91-44-02288-3

Ramachandran,Vilayanur. ((1998) citerad i Tall & Davis 2002).

Skemp, Richard (1978): *Relational understanding and instrumental understanding.* Tillgänglig 2007-11-11: http://www.science.oregonstate.edu/~burgerl/Skemp%20paper.pdf

Skolverket (2000). *Kursplan för kursen Matematik C. Ma 1203 – Matematik C*. Tillgänglig 2007-11-06: http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0708&infotyp=5&skolform=21&id=3210&extraId=

Skolverket, (2000c). *Skolverkets föreskrifter om ämnet matematik i gymnasieskolan*. Tillgänglig 2007-11-06: http://www3.skolverket.se/ki03/front.aspx?sprak=SV&ar=0405&infotyp=8&skolform=21&id=MA&extraId=,

Stewart, James (2003). *Calculus: early transcendentals*, 5 uppl. Belmont, California: Brooks/Cole. ISBN 0-534-39321-7

Svenska språknämnden (2005). *Svenska skrivregler*. Solna: Almqvist & Wiksell. ISBN 91-21-11280-0

Säljö, Roger (2005). *Lärande och kulturella redskap: om lärprocesser och det kollektiva minnet*. Nordstedts akademiska förlag: Stockholm. ISBN 91-7227-443-3

Tall, David (1985). *Understanding the calculus.* Mathematics Education Research Centre, University of Warwick. Tillgänglig 2007-11-10: www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1985a-und-calc-mt.pdf

Tall, David (1985). *The gradient of a graph*. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick. Tillgänglig 2007-11-10: www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1985b-gradient-mt.pdf

Tall, David & Davis, Gary (2002). *What is a scheme?* University of Southampton & Univerity of Warwick, UK. Tillgänglig 2007-11-10: www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002d-davis-**scheme**s.pdf

Thompson, Jan (1991). *Wahlström & Widstrands matematiklexikon.* Falun: Wahlström & Widstrand. ISBN 91-46-16515-0

TIMSS, (1998). *Third Internationall Mathematics and Science Study*. Rapport 145. Skolverket, Stockholm. ISRN SKOLV-R--145--SE

Vetenskapsrådet, (2007). *Hantering av integritetskänsligt forskningsmaterial.* Tillgänglig 2007-11-15: http://www.vr.se/download/18.aae1aa51132473084980005790/integritetskansligt_forskningsmateria2l.pdf

Viholainen, Antti (2006). *Why is a discontinuous function differentiable?* In J. Novotna, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), Proceedings of the 30 th conference of the international group for the psychology of mathematics education (pp. 329-336, vol 5). Prague: Charles University.

Wallin, Hans; Lithner, Johan; Wiklund, Staffan; Jacobsson, Sven (2005). *NT/c+d, Liber Pyramid gymnasiematematik för Naturvetenskaps- och Teknikprogrammen, kurs C och D*. Liber AB, Slovenien. ISBN 9789147016846

Wikström, Hugo (1997). *Att förstå förändring. Modellbyggande, simulering och gymnasieelevers lärande*. Göteborgs universitet: Göteborg studies in educational sciences, 114.

Zandieh, Michelle J (2000). *A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative*. *CBMS Issues in Mathematics Education, 8*, 103-127. Tillgänglig 2007-11-12: http://books.google.com/books?hl=sv&lr=&id=knYjqCFRhlkC&oi=fnd&pg=PA103&dq=%22Zandieh%22+%22A+Theoretical+Framework+for+Analyzing+Student+...%22+&ots=Sz3qaajqBh&sig=S8TCfQXPFkh_zQOe_4o1Yg8owpY#PPP7,M1

Bilaga 1

Vi är två studenter som läser till lärare vid Kristianstad högskola och vi ska nu göra vårt examensarbete på avancerad nivå. Vi vill undersöka om ni som läser Ma C anser att ni har någon nytta av att kunna derivera och om ni kan se kopplingen mellan det ni lär er i skolan och den vardag ni lever i och om ni har förstått innebörden av derivering. Vi vill undersöka detta för att bättre kunna anpassa vår undervisning till elevernas verkliga behov. Att delta är frivilligt. Du får lov att avstå från att svara på en eller flera frågor men vi är tacksamma om du svarar på alla frågor. **Det kommer att ske helt anonymt och enkäterna kommer att makuleras efter vår bearbetning.** Det finns ingen tidsbegränsning för att besvara frågorna. Det är förbjudet att diskutera med andra vid besvarandet.

Tack för att du deltar!
Har ni frågor angående enkäten ring oss på 0732- 22 56 56 eller 070-28 28 521

Med vänliga hälsningar
Mihaela och Ulrika

Ringa in ditt svar och svara utförligt där det krävs!

1) Jag är: Pojke Flicka
2) Vilken skola går du på?____
3) Vilket program läser du på? ____
4) Anser du att det är viktigt med undervisning i matematik på gymnasiet? Ja Nej
5) Anser du att du har lätt eller svårt för matematik i allmänhet?

   Mycket lätt Lätt Svårt Mycket svårt

6) Vad är detta? $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

a. Funktion	Ja	Nej
b. Graf	Ja	Nej
c. Hyperbel	Ja	Nej
d. Parabel	Ja	Nej
e. Derivatans definition	Ja	Nej
f. Ekvation	Ja	Nej
g. Gränsvärdets definition	Ja	Nej

7) Vad är detta? $f(x)=x^2-3x+5$

a. Funktion	Ja	Nej
b. Graf	Ja	Nej
c. Hyperbel	Ja	Nej
d. Parabel	Ja	Nej
e. Derivatans definition	Ja	Nej
f. Ekvation	Ja	Nej
g. Gränsvärdets definition	Ja	Nej

8) Beskriv med egna ord vad en funktion är? ______________________________

____

____

____

9) Ge ett exempel från vardagen som kan beskrivas med en funktion.________________

____

____

10) Beskriv med egna ord vad derivering innebär?____________________________

____

____

11) Vad får du veta när du deriverar en funktion? ____________________________

____

12) Anser du att du har tillräcklig kunskap och förståelse för vad derivata innebär för att kunna använda det när du behöver? Ja Nej

13) Vilka storheter är funktionen beroende av i följande fall?

a. när vi tömmer badkaret på vatten ____________________________

b. när vi avläser hastighetsmätaren på bilen ______________________

14) Vad får vi veta om vi deriverar funktionen som beskriver att vi tömmer badkaret?

____

15) Vad får vi veta om vi deriverar funktionen som beskrivs av hastighetsmätaren på bilen?

____

16) Ge andra exempel på vardagssituationer där vi kan beräkna något med hjälp av derivering?

____

17) Hur skulle du förklara vad derivata är, för någon som inte vet det?________________

____

____

____

18) Beskriv svårighetsgraden av att förstå och lära sig de olika kursmomenten.

a. Derivatans definition — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

b. Beräkna derivatan utifrån en graf — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

c. Numerisk derivering — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

d. Tolka den grafiska beskrivningen — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

e. Beskriva derivatan med en teckentabell — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår (Kurvkonstruktion)

f. Konkav uppåt och konkav neråt — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

g. Betydelsen av extrempunkterna — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

(max, min och terrass)

h. Deriveringsreglerna för

   i. polynom — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

   ii. Trigonometriska funktioner — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

   iii. Sammansatta funktioner — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

   iv. Produkter — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

   v. Kvoter — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

i. Att förstå när derivering ska användas — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

(tillämpningar)

j. Se kopplingen mellan derivata och vardagen — Mycket lätt Lätt Svår Mycket svår

19) Tror du att du har någon nytta av derivering efter avslutad kurs? Ja

Nej

Motivering: ____

20) Vad tror du är anledningen till att du ska lära dig att derivera? ________________

____

21) Vem har lärt dig att förstå derivata? (Ex, Mattelärare, Fysiklärare, Kompis, Förälder)

____

22) Kan du se en koppling mellan skolmatematiken och din vardag i allmänhet? Ja

Nej

23) Övrigt. Något annat du vill tillägga. Skriv!______________________

____
____
____

Tack för din medverkan! Vi uppskattar den!
Mihaela och Ulrika

Bilaga 2

Vi är två studenter som läser till lärare vid Kristianstad högskola och vi ska nu göra vårt examensarbete på avancerad nivå. Vi vill undersöka om ni som läser Ma C anser att ni har någon nytta av att kunna derivera och om ni kan se kopplingen mellan det ni lär er i skolan och den vardag ni lever i och om ni har förstått innebörden av derivering. Vi vill undersöka detta för att bättre kunna anpassa vår undervisning till elevernas verkliga behov. Att delta är frivilligt. Du får lov att avstå från att svara på en eller flera frågor men vi är tacksamma om du svarar på alla frågor. **Det kommer att ske helt anonymt och enkäterna kommer att makuleras efter vår bearbetning.** Det finns ingen tidsbegränsning för att besvara frågorna. Det är förbjudet att diskutera med andra vid besvarandet.

Tack för att du deltar!
Har ni frågor angående enkäten ring oss på 0732- 22 56 56 eller 070-28 28 521

Med vänliga hälsningar
Mihaela och Ulrika

Ringa in ditt svar och svara utförligt där det krävs!

1. Jag är: Man Kvinna
2. Vilken skola undervisar du på?________________________________
3. Vilket/a program undervisar du på? ________________________________
____
4. Anser du att det är viktigt med undervisning i matematik på gymnasiet? Ja
Nej
5. Anser du att du har lätt eller svårt för matematik i allmänhet?
Mycket lätt Lätt Svårt Mycket svårt
6. Vad innebär derivering? ________________________________
____
____
7. Vad är detta? $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ ________________________________
8. Tycker du att det är relevant att gymnasieeleverna lär sig derivera? Ja
Nej
9. Är kunskapen som eleverna får om derivata relevant för deras framtid? Ja
Nej
10. Vad anser du är anledningen till att du ska lära dina elever att derivera?________________
____
____
11. Hur motiverar du dina elever att lära sig derivata?________________________________
____
____

____

12. Anser du att du har tillräckliga kunskaper om derivata för att lära ut det till dina elever?

    Ja Nej

13. Ungefär hur många timmar ägnar ni åt avsnitten om derivering?________________________

    Anser du att det är tillräckligt? Ja Nej

    Motivera: ____

    ____

14. Tror du att eleverna har förstått vad derivatan innebär när ni avslutar avsnittet? Ja Nej

    Motivera: ____

    ____

    ____

    ____

15. Hur länge har du arbetat som matematiklärare på gymnasiet? ________________________

16. Vilken utbildning har du? ____

17. Hur många högskolepoäng i matematik omfattar den? ____________________________

18. Skulle du vilja lära dig mer om elevers begreppsbildning och förståelse av olika matematiska begrepp?

    Ja Nej

    Motivera: ____

    ____

19. Övrigt. Något annat du vill tillägga. Skriv!____

    ____

    ____

    ____

Tack för din medverkan! Vi uppskattar den!

Mihaela och Ulrika

Bilaga 3

Elev 4T

Fråga nr. 6: är rätt besvarad med derivatans definition.

Fråga nr. 7: är rätt besvarad med funktion.

Fråga nr. 8: ”en matematisk beskrivning hur ett värde beror av ett eller flera andra värden.”

Fråga nr. 9: ”sträckan man kört är en funktion av hastigheten och tiden.”

Fråga nr. 10: ”att räkna ut ändringshastigheten i ett visst ögonblick t. ex. bilens hastighet efter 15 sekunder.”

Fråga nr. 11: ”ändringshastigheten av funktionsvärdet.”

Elev 3D

Fråga nr. 6: är felbesvarad med ekvation.

Fråga nr. 7: är felbesvarad med ekvation.

Fråga nr. 8: ”en ekvation som man kan använda för att se ett förhållande mellan olika tal.”

Fråga nr. 9: ” för att få en överblick på t.ex. en resultat budget.”

Frågan nr. 10 och nr. 11: är inte besvarade.

Elev 4K

Fråga nr. 6: är delvis rätt, rätt alternativ är angivet tillsammans med fler alternativ: ett rätt – derivatans definition, flera felaktiga – funktion, ekvation och gränsvärdets definition.

Fråga nr. 7: är delvis rättbesvarad med två alternativ: ett rätt svar – funktion och ett felaktigt svar – ekvation.

Fråga nr. 8: ”en funktion är en variabel med olika värde.”

Fråga nr. 9: ”hur maten smällts i vår mage.”

Fråga nr. 10: ”matematiskt term som visar oss ökning.”

Fråga nr. 11: ”förändringsfaktorn/ökning.”

Elev 4Å

Fråga nr. 6: är rätt besvarad med derivatans definition.

Fråga nr. 7: är delvis rätt besvarad med två alternativ: ett rätt svar, funktion och ett fel svar, ekvation.

Fråga nr. 8: ”en funktion beräknar man värdet på funktionen beroende på värdet på x.”

Fråga nr. 9: ”man kan beräkna kostnaden för en skidresa då x är antal dagar f(x)=2500x”

Fråga nr. 10: ”när de deriverar så tar du reda på något som händer under ett visst tillfälle.”

Fråga nr. 11: ”du får fram värdet på funktionen under ett visst tillfälle.”

Elev Fråga nr.	4T	3D	4K	4Å
12	Ja	nej	nej	nej
13 a b	– tiden – sträckan	– hålets diameter, vattenvolymen – Sträckan och tid	– liter – liter och minuter	– volym – hastighet
14	Hur fort badkaret töms, Hastigheten	Hur fort badkaret Töms L/t	Hastigheten, vatten/min som töms	Vatten som töms under ett särskilt tillfälle
15	Antal m/s bilen kör	acceleration	acceleration	Hastigheten vid ett särskilt tillfälle
16	Bredbandshastighet, fylla en hink med vatten	Hur fort en gryta med vatten kokar	befolkningsökning	-
17	Förändringshastigheten i ett visst ögonblick	Derivera är ett sätt att räkna ut hur mycket något ökar/minskar	Förändringsfaktor av något	Man tar reda på något som sker under ett speciellt tillfälle
18 a b c d e f g h. i h. ii h .iii h. iv h. v i j	Lätt Lätt Lätt Lätt Lätt Lätt Lätt Lätt Ej gjort Ej gjort Ej gjort Ej gjort Lätt lätt	Svår Lätt Lätt Mycket svår Mycket svår - Mycket lätt - - - - - Lätt Svår	Svår Mycket svår Svår Svår Svår Lätt svår svår svår svår svår svår svår lätt	lätt lätt lätt lätt svår lätt lätt lätt ej gjort lätt ej gjort ej gjort svår lätt