HÖGSKOLAN KRISTIANSTAD

EXAMENSARBETE

Hösten 2007

Lärarutbildningen

Gränsvärden

- en oändlig uppgift

Författare

Christian Thifors

Handledare

Kristina Juter

www.hkr.se

Gränsvärden
- En oändlig uppgift

Christian Thifors

Abstract

Syftet har varit att undersöka hur elever uppfattar och hanterar gränsvärden. Detta har jag gjort genom att först studera litteratur inom området och sedan genomföra intervjuer med elever från olika matematik E klasser. Tio elever intervjuades utifrån fem stycken problem med någon anknytning till gränsvärden. Undersökningen visar att eleverna har dålig förståelse för gränsvärden. De slutsatser som jag kan dra utifrån min undersökning är att elever saknar förståelse för vissa grundläggande begrepp som *kontinuitet* och *går emot*.

Ämnesord: gränsvärden, matematikundervisning, gymnasiet, oändligheter, asymptoter, kontinuitet

Innehåll

1 Inledning 5
1.1 Bakgrund 5
1.2 Syfte 5
2 Forskningsbakgrund 5
2.1 Vad är gränsvärden? 5
2.1.1 Oändlighetsbegreppet 6
2.1.2 Kontinuitetsbegreppet 6
2.1.3 Asymptotbegreppet 6
2.2 Styrdokument 7
2.3 Lärandeteorier 7
2.4 Olika undersökningar 9
3 Frågeställning 12
4 Empirisk del 12
4.1 Metod 12
4.1.1 Metodologisk utgångspunkt 12
4.1.2 Undersökningsgrupp 12
4.1.3 Genomförande 12
4.1.4 Analys av materialet 13
4.2 Resultat och analys 13
4.2.1 Fråga 1; Talföljden 0,9999… 13
4.2.2 Fråga 2; Cirkeln 14
4.2.3 Fråga 3; Kontinuitet 15
4.2.4 Fråga 4; Zenons paradox 16
4.2.5 Fråga 5; Når funktioner fram till asymptoter? 16
4.2.6 Slutsatser 17
5 Diskussion 17
5.1 Resultatdiskussion 17
5.1.1 Olika talföljder 17
5.1.2 Kontinuitet 19
5.1.3 Asymptoter 19
5.2 Metoddiskussion 19
5.3 Pedagogiska konsekvenser 19
6 Sammanfattning 20
Referenser 21

Bilaga 1; Intervju om gränsvärden 23
Bilaga 2; Utdrag ur intervjusvaren 25

1 Inledning

Under denna rubrik presenteras bakgrunden och syftet med arbetet.

1.1 Bakgrund

Gränsvärden har intresserat mig sen jag först kom i kontakt med det under derivatans definition. Gränsvärden är ett abstrakt begrepp inom matematiken som används inom flera områden, som exempelvis derivatan, oändlighet och kontinuitet. Dessa områden är centrala för den matematiska analysen. Därför är det viktigt att det finns en förståelse för detta hos eleverna redan på gymnasiet. Gränsvärden nämns på gymnasiet i samband med derivatans definition i Matematik C och något djupare analyseras det i Matematik E. Cornu (1991) skriver att det är en stor utmaning att undervisa om gränsvärden eftersom det är väldigt komplext. Olika studier från Tall och Vinner (1981), Cornu (1991) och Sierpinska (1987) visar att förståelsen för gränsvärden är sällsynt, därför ville jag göra en egen undersökning om hur förståelsen är hos gymnasieelever som läser Matematik E vilka har behandlat avsnittet om gränsvärden.

1.2 Syfte

Den här rapporten syftar till att belysa vad elever har för förståelse av begreppen gränsvärde och oändlighet samt hur de hanterar dessa. Begreppsuppfattningen kommer att belysas ur ett gymnasieperspektiv, eftersom rapportens målgrupp är pedagoger som ska undervisa i Matematik C, D, E och F på gymnasiet.

2 Forskningsbakgrund

I forskningsbakgrunden kommer jag först att definiera gränsvärden därefter kommer jag att ta upp vad styrdokumenten säger. Slutligen vill jag ge en bild av vad forskningen säger om elevers begreppsuppfattning om gränsvärden.

2.1 Vad är gränsvärden?

För att kunna förstå den här rapporten krävs att man känner till begreppet gränsvärde. Här kommer en definition presenterad av Råde och Westergren (1998). $f(x) \to A$ när $x \to a$, om det för varje $\varepsilon > 0$, existerar ett $\delta > 0$ som gör att $|f(x) - A| < \varepsilon$ gäller för alla x i området $0 < |x - a| < \delta$. Det betyder att funktionen $f(x)$ har ett gränsvärde A, när x närmar sig a.

Antag att D_f inte är uppåt begränsad, det vill säga att det i varje intervall (M,∞), finns minst en punkt ur D_f. Vi säger då, att $f(x)$ har gränsvärdet A, då x går mot oändligheten, om det till varje $\varepsilon > 0$ finns ett M så att $|f(x) - A| < \varepsilon$, då $x > M$ och $x \in D_f$. Vi kan då skriva $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

Eftersom en talföljd kan tolkas som en funktion från de positiva heltalen (Z^+) till de reella talen (R), täcker ovanstående definitioner även talföljder. En funktion är en korrespondens mellan två mängder A och B sådan att varje element i A tillordnas precis ett element i B. Om A är de positiva heltalen och B de reella talen, så är den reella talföljden a_1, a_2, a_3, ... en funktion.

2.1.1 Oändlighetsbegreppet

Oändlighetsbegreppet har skapat diskussioner matematiker emellan sen det började användas. Det finns olika oändligheter, potentiell oändlighet och faktisk oändlighet är de två vanligaste modellerna (Tirosh, 1991).

Tall (1980) undersökte hur oändlighet uppfattas och det som undersökningen visade var att oändlighet ansågs vara en enda ointaglig positiv oändlighet. Undersökningen visade även att elever generellt har svårt att acceptera att när $s_n \to s$ blir de lika med varandra, de tror att man kommer väldigt nära men att man aldrig når fram enligt Tall (1980).

2.1.2 Kontinuitetsbegreppet

En funktion $f(x)$ är kontinuerlig för $x = a$ om $f(a)$ är definierad, samt att $f(x)$ har ett gränsvärde då x går emot a och när detta gränsvärde är lika med $f(a)$. Funktionen $f(x)$ sägs vara kontinuerlig i ett intervall om den är kontinuerlig för varje x i intervallet. En funktion sägs även vara kontinuerlig om den är kontinuerlig i sitt definitionsområde (Råde & Westergren, 1998).

2.1.3 Asymptotbegreppet

En rät asymptot är en linje som en funktion närmar sig mer och mer ju närmare man kommer definitionsmängdens gränser. Vågräta och sneda asymptoter beräknas fram genom att använda formeln $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$, där a och b anger den räta linjens funktion i $y = ax + b$. En lodrät asymptot tas fram när man går mot ett visst värde både från vänster och höger som gör att gränsvärdet går mot oändligheten (Råde & Westergren, 1998).

2.2 Styrdokument

När det gäller läroplanen för gymnasiet och kursplanen för Matematik E på gymnasiet, nämns inte gränsvärden, däremot i kursplanen för matematik C står det om derivatan och hur den uppstår. Utbildningsdepartementet (2006) skriver i läroplanen för de frivilliga skolformerna att varje elev ska kunna formulera, analysera och lösa matematiska problem av betydelse för yrkesliv. ”Läraren skall i undervisningen skapa en sådan balans mellan teoretiska och praktiska kunskaper som främjar elevernas lärande” (Utbildningsdepartementet, 2006, s.12).

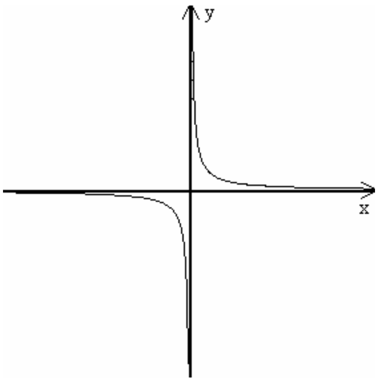
2.3 Lärandeteorier

Det finns flera olika teorier om hur man bildar kunskap, exempelvis rationalismen, empirismen, konstruktivismen och progressivismen. Enligt empirismen ska man konkretisera kunskapen för att förenkla inlärandet. Det är viktigt att man som elev ser kontexten. Att gå olika vägar till ett visst svar förespråkas (Stensmo, 1994).

Davis och Vinner (1986) beskriver vad de kallar för naiva lärandeteorier, exempelvis den tomma vasen teorin. Den går ut på att man ser elever som tomma vaser som pedagoger ska fylla upp. De menar att man istället ska titta på elevers förkunskaper och därifrån bygga vidare på dessa, vilket även Vygotskij (1926) menade med sin utvecklingszon.

Matematisk förståelse hos elecverna när det gäller gränsvärden kan inte endast förklaras med matematiska tankesätt utan man måste även analysera tankeprocessen hos varje enskild individ skriver Tall (1980). Enligt Piaget (1972) är det den kognitiva tankeprocessen som formar människan. Piaget (1972) delade in människans utveckling i olika kognitiva utvecklingsstadier och det sista stadiet kallades för abstraktoperationellt tänkande. Tall och Vinner (1981) introducerade termerna begreppsbild (concept image) och begreppsdefinition (concept definition) för att förklara det matematiska tänkandet hos elever. De definierade uttrycket begreppsbild som den kognitiva struktur som en individ associerar till ett visst begrepp, exempelvis mentala bilder. Begreppsbilderna ändras exempelvis utifrån erfarenheter. Ibland väcks olika mentala konflikter, Tall och Vinner (1981) tar upp ett exempel när elever lägger ihop $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ korrekt med hjälp av decimaltal, men när samma metod används vid $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ blir det inte korrekt. Begreppsdefinitionen fastställer vad ett visst begrepp har för innebörd. Det är samspelet mellan begreppsbilder och begreppsdefinitioner som Tall och Vinner (1981) förespråkar för att få en djup förståelse.

Davis och Vinner (1986) menar att det är vanligt att elever vill skapa en mental bild av problemet, men det uppstår en konflikt när man som elev försöker gå till oändligheten. Det kan enligt Tall (1980) ha att göra med att elever tänker sig oändligheten som ett tal. Därför menar Tall (1980) att elever måste släppa tankegången om ändliga tal när man behandlar oändligheter. Enligt Davis och Vinner (1986) kan skapandet av mentala bilder försvåra förståelsen för oändlighetsbegreppet. Detta eftersom elever tenderar till att se att allt har en början och ett slut. Även Tall och Vinner (1981) menar att man inte ska försöka skapa mentala bilder när det gäller förståelse för kontinuitetsbegreppet, utan att man istället ska behandla beviset. Annars kan det lätt bli som i exemplet som Tall och Vinner (1981) visar med funktionen $f(x)=\frac{1}{x}$ som inte är definierad i $x=0$. Den är trots sitt, se figur 1, utseende kontinuerlig i sitt definitionsområde.



figur 1; $f(x)=\frac{1}{x}$

Tall och Vinner (1981) förespråkar en spiralmodell (spiral technique) för att få elever att förstå gränsvärden. Denna modell som även kan ses som en rörelseteori som går ut på att man börjar visa exempel och bygger på detta sätt upp olika begreppsbilder. I slutet av avsnittet visas definitionen och därmed sammanlänkas begreppsbilderna med begreppsdefinitionen. Exempelvis visar Tall och Vinner (1981) hur de presenterar flera olika talföljder. De frågar eleverna i undersökningen om 0,333… och 0,9999… kan skrivas som bråk. Flera av eleverna har tidigare svarat att 0,9999… är mindre än 1 men att $\lim_{T\to\infty}\sum_{n=1}^{T} 9\cdot 10^{-n}=1$. Men samma elever i den här undersökningen skrev nu att $0{,}3333...=\frac{1}{3}$ och därför blev $0{,}9999...=3\frac{1}{3}=1$. I det här exemplet blir det en tydlig kognitiv konflikt, Tall och Vinner (1981) menar att genom att arbeta på detta sätt med olika begreppsbilder blir det enklare att sammanlänka med begreppsdefinitionen.

Cornu (1991) menar att det svåraste när det gäller att lära sig samt att lära ut gränsvärden är att förstå definitionen samt att kunna kontextualisera den. Cornu (1991) menar att det är en stor skillnad mellan att komma ihåg definitionen jämfört med att kunna använda den. Enligt Cornu (1991) uppfattar personer ord olika, därför är det viktigt att man som pedagog förklarar vikten av att förklara att matematiska termer är som ett nytt språk enligt Tall och Vinner (1981). Ett ord som uppfattas olika är enligt Cornu (1991) *går emot*, vissa tror att går emot betyder att man går emot men aldrig kommer fram, medan andra tror att det betyder att man går emot och kommer fram. Ett annat exempel som Cornu (1991) och Tall och Vinner (1981) tar upp är ordet *kontinuitet*, elever kan uppfatta ordet som att det inte får ha några avbrott, om man har funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ som är kontinuerlig i sin definitionsmängd ses inte den som kontinuerlig av elever eftersom den har ett avbrott i $x = 0$.

Szydlik (2000) beskriver tre olika lärandeteorier angående gränsvärden, varav två av dessa anses vara mindre bra. En av de sämre teorierna är en teori som säger att gränsvärdet inte går att nå. Exempelvis när man definierar gränsvärden säger man att s_n går emot s, att vi kan göra s_n så nära s vi vill. Detta menar Szydlik (2000) kan få till följd att elever inte tror att talföljder konvergerar och får ett visst värde. Den andra mindre bra teorin enligt Szydlik (2000) är en som säger att gränsvärdet är en gräns som man inte kan korsa. Däremot menar Szydlik (2000) att en rörelseteori om gränsvärden som Tall och Vinner (1981) presenterar är en bra modell för att få elever att förstå, dock menar Szydlik (2000) att den inte är exakt och det kan därför lätt bli en konflikt med gränsvärdesdefinitionen.

För att elever ska förstå gränsvärden, krävs det att pedagoger förklarar nyttan av gränsvärden. Upplägget med en definition följt av några algebraiska uppgifter stimulerar inte eleverna att lära sig gränsvärden. Det är därför viktigt att visa i vilka situationer som gränsvärden kommer till nytta (Cornu, 1991).

En alternativ lärandeteori för gränsvärden är att helt strunta i begreppet gränsvärde och istället hantera det med infinitesimaler enligt Todorov (2001). Eftersom definitionen för gränsvärden är så svår är det ingen idé att lära ut den. Todorov (2001) går så långt och skriver att vi knappt behöver begreppet gränsvärden alls. Modellen går ut på att hantera allt numeriskt istället och nya axiom införs, intresserade läsare hänvisas till referenserna.

2.4 Olika undersökningar

Efter att ha tagit del av olika undersökningar verkar det som en djup förståelse för gränsvärden är sällsynt enligt Tall och Vinner (1981), Cornu (1981) och Sierpinska (1987).

Undersökningar visar exempelvis att vissa elever har förståelse för gränsvärden när det gäller funktioner men inte när det gäller talföljder.

Sierpinska (1987) menar att det finns olika epistemologiska hinder när det gäller läran om gränsvärden. Oändlighetsbegreppet är enligt Sierpinska (1987) en central del när det gäller att förstå gränsvärden. Sierpinska (1987) gjorde en undersökning som exempelvis innehöll den oändliga talföljden 0,9999…. Enligt studien har eleverna svårt att acceptera att den talföljden får gränsvärdet 1. Ett bevis för att talföljden får gränsvärdet 1, enligt Sierpinska (1987) är att skriva a=0,9999… det ger att $10a$=9,9999… tar du sen bort a ger det;$10a - a$=9 vilket ger att $9a$=9 vilket ger a=1. För att göra detta krävs att man använder sig av en limes process för att hantera de oändligt många niorna, $\lim_{T\to\infty}\sum_{n=1}^{T} 9\cdot 10^{-n} = 1$. Davis och Vinner (1986) och Szydlik (2000) anser även de att talföljden endast får gränsvärdet 1. Szydliks (2000) undersökning om just talföljden 0,9999… visade att några elever trodde att den talföljden blev lika med 1.

Tall och Vinner (1981) undersökte elevers uppfattning om kontinuitet, och majoriteten av eleverna har svårt att acceptera att en funktion som inte sitter ihop hela tiden ändå är kontinuerlig. Exemplet som de använde sig av var funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, den är inte definierad i x=0 men ändå kontinuerlig i sitt definitionsområde. De fann även att funktioner som definieras på olika delintervall, som exempelvis $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \le 0) \\ x & (x \ge 0) \end{cases}$ leder till att elever tror det handlar om två olika funktioner och därför tror de att de inte är kontinuerliga.

Szydlik (2000) undersökte hur elever uppfattar och hanterar gränsvärden. En fråga i undersökningen var att eleverna skulle definiera vad ett gränsvärde är. Svaren enligt Szydlik (2000) tyder på att eleverna ser gränsvärden som ett statiskt värde eller ett rörelsevärde som rör sig mer och mer mot gränsvärdet. Det fanns även de elever som såg gränsvärden som något som man inte kan nå fram till. De elever i undersökningen som förstod funktioner förstod även gränsvärden.

Monaghan (1991) har gjort en studie om hur språket påverkar förståelsen för gränsvärden. Studien visar att vissa matematiska uttryck kan göra att eleverna blir förvillade, exempel på uttryck är *går emot* och *konvergerar*. Där har eleverna olika uppfattningar om vad de betyder exempelvis betyder går emot att man går emot och kommer fram eller betyder det att man går emot och inte kommer fram. Slutsatsen utifrån undersökningen är att språket är ett viktigt redskap för att förstå matematiken och därefter bör fler analyser angående misstolkningar göras (Monaghan, 1991).

3 Frågeställning

Med syftet och litteraturgenomgången som bakgrund har jag formulerat två frågor.

- Hur ser elever som läser Matematik E på begreppet gränsvärde?
- Hur hanterar elever som läser Matematik E begreppet gränsvärde?

4 Empirisk del

Under den här rubriken presenteras valet av metod samt tillvägagångssätt. Till sist presenteras resultat och analys av studien.

4.1 Metod

I metodavsnittet presenteras metodologisk utgångspunkt och genomförandet.

4.1.1 Metodologisk utgångspunkt

Enligt mina frågeställningar vill jag ta reda på hur elever hanterar gränsvärden. Patel och Davidson (2003) skriver att genom en intervju kan man urskilja de intervjuades uppfattning om något. De beskriver även en så kallad trattmodell som innebär att man kan börja med stora frågor för att sedan gå in på djupet. Just detta sätt valde jag att använda mig av för att kunna gå in på djupet vilket man inte kan göra med exempelvis en enkätundersökning. För att öka validiteten behövs flera olika metoder enligt Denscombe (2000).

4.1.2 Undersökningsgrupp

Den empiriska undersökningen genomfördes på en gymnasieskola i en mellanstor stad i Småland. Sammanlagt intervjuades tio stycken elever från tre olika Matematik E klasser. Urvalet av vilka som intervjuades gjordes slumpvis genom att jag hade elevernas namn på små lappar som jag drog ur en burk. I burken fanns endast namn på de elever som hade sagt ja till att ställa upp på intervjun, det var några i varje klass som inte ville bli intervjuade. I de tre klasserna fanns det 16, 17 och 19 elever. Sammanlagt fanns det 44 namn i burken, det var åtta stycken elever som inte ville ställa upp på en intervju.

4.1.3 Genomförande

Ett antal frågor (se bilaga) konstruerades utifrån ämnet. Eleverna i min undersökning har stött på gränsvärdesbegreppet i matematik C där derivatans definition presenterades. Därefter har de behandlat gränsvärdesbegreppet, asymptoter, kontinuitet och generaliserade integraler i matematik E. Jag bedömer att eleverna kan klara av samtliga frågor under intervjun eftersom intervjun handlar om begrepp som behandlats i matematik E kursen.

Först genomfördes en pilotintervju med en elev från en gammal VFU (verksamhets förlagd utbildning) period. Kvale (1997) skriver att genom att genomföra en pilotintervju kan intervjuarens självförtroende öka. Pilotintervjun gjorde inte att jag ändrade mina frågor men fick en liten uppfattning om vilka svar jag kan få samt eventuella följdfrågor. Pilotintervjun är inget som presenteras i detta arbete.

Intervjuerna genomfördes på en gymnasieskola i ett mindre rum där jag och den intervjuade satt med en bandspelare. Före varje intervju var jag noga med att gå igenom de forskningsetiska principerna. Vetenskapsrådet (2002) skriver att som forskare måste man informera undersökningsdeltagare om vad deras uppgift i undersökningen är och vilka villkor som gäller for deras deltagande. Jag informerade om att det är helt frivilligt och att de har rätt att avbryta sin medverkan när som helst. Vetenskapsrådet (2002) skriver även att alla personuppgifter som samlas in vid en undersökning måste behandlas med konfidentialitet.

4.1.4 Analys av materialet

Intervjuerna behandlades i flera olika steg, först lyssnades de igenom ett par gånger och därefter transkriberades intervjuerna. Elevernas svar behandlades fråga för fråga och sen tittade jag på variationen utifrån de utgångspunkter som finns i frågeställningarna. Från den transkriptionen valdes ett antal informativa citat ut. Två exempel på hur intervju transkriptionen såg ut ses i Bilaga.

4.2 Resultat och analys

Under denna rubrik kommer jag att presentera resultaten från intervjuerna. Jag kommer att diskutera varje fråga för sig.

4.2.1 Fråga 1; Talföljden 0,9999…

När jag ställde frågan om vad som händer med talföljden 0,9999… när man har ett oändligt antal nior fick jag divergerande svar från de tio intervjuade. Jag hade fyra olika alternativ där ett eller flera kunde vara rätt, de olika alternativen var:

a) blir dess gränsvärde 1
b) blir den lika med 1
c) går den mot 1
d) den blir väldigt nära 1 men når aldrig fram

Svaren fördelades enligt tabell 1, alternativen med fetstil visar det korrekta svaret.

	Ja	Nej	Vet ej
a)	**7**		3
b)	2	**6**	2
c)	**9**		1
d)	**7**	3	

tabell 1; Svarsfördelningen på fråga 1

Av de intervjuade eleverna är det två stycken som tror att talföljden blir lika med 1, jämfört med sex som inte tror det. Det var ingen i undersökningen som svarade att den inte gick emot 1 eller att dess gränsvärde inte var 1. Däremot svarade en elev att den blev 1 efter att ha resonerat med sig själv:

> Man vill gärna tro att det är alternativ d. Men när man har oändligt antal nior kanske den går mot ett eller till och med får gränsvärdet 1. Det borde bli ett till slut.

Elevens svar visar att eleven tycker att det borde vara mindre än ett men har missuppfattat och tror att den blir lika med sitt gränsvärde. Det är flera elever i undersökningen som poängterar att den blir oändligt nära 1 men att den inte når fram. En elev svarade:

> Om man har oändligt många nior kommer den så nära den kan göra. Avståndet till 1 blir oändligt litet.

4.2.2 Fråga 2; Cirkeln

Den här frågan är lik den första uppgiften eftersom det här också blir en oändlig talföljd. Frågan jag ställde var att om man fyller en cirkel med först hälften och sen fyller man den bit som blev över och sen fyller hälften av den biten som blev över och så vidare. Talföljden skulle då bli $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} ...$ Blir cirkeln fylld om man fortsätter och fyller med oändligt många bitar. Här svarade nio av tio stycken att den aldrig blir fylld vilket är korrekt, en elev svarade:

> Nej den blir aldrig fylld det finns alltid en halv bit kvar.

Den enda elev som svarade att den blev fylld resonerade på följande sätt:

> Ja sätter man in oändligheten blir den fylld för den sista termen i talföljden blir då ett genom oändligheten som är noll. Sen kan du inte gå längre. Då måste den vara fylld.

Svaren från uppgiften om cirkeln skiljer sig inte mycket från den första talföljden 0,9999…. Av de två eleverna som trodde att den talföljden blev 1, var det en av dem som svarade att cirkeln fylls. Många av eleverna tänker sig det hela med figurer och svarar bildligt att det blir alltid en halv bit kvar. Beviset för att talföljden konvergerar och får gränsvärdet 1 förklaras här; $\lim_{T\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{T} 2^{-n}\right) = 1$. Den här talföljden blir alltså aldrig lika med 1 utan endast dess gränsvärde blir 1, därför blir inte cirkeln fylld.

4.2.3 Fråga 3; Kontinuitet

Fråga 3 handlade om tre olika funktioner och det som frågades efter var om dessa var kontinuerliga, om de hade några asymptoter samt några gränsvärden. De gränsvärden som jag menade var de egentliga gränsvärdena och inte de oegentliga. Skillnaden mellan dessa är att ett egentligt gränsvärde närmar sig ett reellt tal medan ett oegentligt närmar sig en oändlighet. Alla funktionerna har gränsvärden någonstans beroende på vad x närmar sig. Men det klargjorde jag inte vid intervjuerna utan var något jag kom på i efterhand.

	Kontinuerliga			Asymptoter		
	Ja	Nej	Vet ej	Ja	Nej	Vet ej
$f(x) = \frac{1}{x}; x \neq 0$	**1**	3	6	**9**		1
$f(x) = x$	**4**		6	1	**6**	3
$f(x) = \begin{bmatrix} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{bmatrix}$		**4**	6	1	**5**	4

Tabell 2; Svarsfördelning på fråga 3

Frågan om kontinuitet var enligt intervjusvaren bland de svåraste. Enligt svaren var det endast fyra elever som var säkra på vad kontinuitet är. Av dessa fyra var det bara en som visste att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ är kontinuerlig i sitt definitionsområde. Frågan om varje funktion gällde också om de hade några asymptoter eller gränsvärden. Här skiljde sig svaren mycket, men de flesta visste att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ hade två asymptoter en längs y-axeln och en längs x-axeln. Sen visar intervjuerna att de flesta eleverna tror att för varje asymptot, finns även ett gränsvärde eftersom sju svarade att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ har gränsvärde. En elev svarade:

> Jag vet inte vad kontinuitet är. Men asymptoter vet jag vad det är. Och bara första figuren har asymptoter och därför också gränsvärden.

Detta är dock inte alltid sant eftersom funktionen $f(x)=\frac{1}{x}$ inte har något gränsvärde när x går emot noll. Endast en elev trodde att $f(x)=x$ hade asymptoter men ingen trodde att den funktionen hade några gränsvärden vilket den har i samtliga punkter. Tilläggas kan göras att meningen med intervjuerna var att hitta de gränsvärden där funktionen inte redan var definierad. Sen blev några få elever förvillade av skrivsättet $f(x)=\begin{bmatrix} 0 & x<0 \\ 1 & x\geq 0 \end{bmatrix}$ eftersom de aldrig hade stött på det tidigare enligt intervjusvaren. Men eftersom många av eleverna i undersökningen har svarat vet ej är den slutsatsen man kan dra att eleverna inte är säkra på varken kontinuitet, asymptoter eller gränsvärden.

4.2.4 Fråga 4; Zenons paradox

Frågan som jag ställde till eleverna i intervjuerna handlar om Zenons paradox, hela beskrivningen om paradoxen finns i bilaga 1. Den här uppgiften skiljer sig lite från de första två eftersom när man går till oändligt små avstånd går både Akilles sammanlagda sträcka och sköldpaddans sammanlagda sträcka mot samma gränsvärde, därför kommer de att mötas i en viss punkt. Vad Zenons modell inte kunde hantera var oändligheter. Den här frågan vållade många spontana svar, exempelvis:

> Jag skulle ha använt att s är lika med v gånger t. Sen skulle jag sätta in olika hastigheter så kan man se var de möts.

Svaret tyder på att eleven tycker att Zenon gör enkla saker onödigt svåra. En konversation mellan intervjuaren och en annan elev ses nedan:

> E5: Avståndet minskar hela tiden, de kommer att bli jämsides till slut. I: Men kommer inte sköldpaddan hela tiden till en ny punkt?
> E5: Nja, det blir ju en oändligt liten sträcka mellan dem därför blir de jämsides.

Här visar en elev förståelse för oändligheter när man inser att en oändligt liten sträcka inte har något avstånd i det här fallet. En annan elev formulerar det matematiskt korrekt:

> Eftersom summan av de här oändligt många avstånden inte blir en oändlig sträcka kommer de att mötas i en punkt.

Utifrån intervjusvaren är det tre stycken som kan förklara varför Zenons modell inte fungerar, jämfört med de sju stycken som inte kan.

4.2.5 Fråga 5; Når funktioner fram till asymptoter?

Sista frågan som användes i intervjuerna var om funktioner når fram till sina asymptoter, exemplet jag hade var funktionen $f(x)=\frac{1}{x}$. Det var endast en elev som svarade att den når fram och tangerar, resterande har svarat att den aldrig når fram. Det rätta svaret är att den inte når fram och eleven som svarade att den når fram sa:

> Vänta nu, ja det kommer de. Deras gränsvärde är ju på asymptoterna så ja när man går i oändligheten på x.

Flera av de övriga svarar att den aldrig når fram för det är det som är en asymptot att funktionen aldrig når fram. Ett exempel på detta:

> Nej det kommer den inte för det är väl det som är en asymptot. Att den går mot men aldrig kommer fram.

Flera i undersökningen har svarat att den inte når fram utan bara kommer oändligt nära. Det som kan ha förvillat den som svarade ja är att både asymptoten och funktionen får samma värde i funktionens gränsvärde när $x \to \infty$, men ett gränsvärde går endast en funktion emot. Funktionen går mot asymptoten men kommer bara oändligt nära.

4.2.6 Slutsatser

Efter den empiriska studien kan jag dra slutsatsen att de flesta elever inte har förstått vad gränsvärden är. När det gäller talföljder som går mot oändligheten är förståelsen även där bristfällig. Undersökningen visade att några få elever tror att talföljderna inte bara får gränsvärdet ett utan även blir lika med ett. När det gäller kontinuerliga funktioner har endast fyra stycken av tio intervjuade en liten aning om vad det är, av dessa fyra är det bara en som har insett att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ är kontinuerlig i sitt definitionsområde. Förståelsen för asymptoter är högre jämfört med föregående uttryck, nio av tio säger i intervjun att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ har två asymptoter, en längs varje axel.

5 Diskussion

Här kommer jag att presentera den diskussion som den empiriska studien och litteraturgenomgången lett fram till. Även en metoddiskussion och resultatets pedagogiska konsekvenser kommer att diskuteras.

5.1 Resultatdiskussion

Under denna rubrik kommer resultatet att diskuteras och återkopplas till litteraturen.

5.1.1 Olika talföljder

Undersökningen visar inte som Sierpinska (1987) att elever har svårt att inse att talföljden 0,9999… får gränsvärdet 1. Som Szydliks (2000) undersökning visar min att vissa elever uppfattar att talföljden inte bara får gränsvärdet 1 utan även blir lika med 1, vilket är fel. Tall (1980) påpekade just det här i sin studie att elever ser oändligheter som ett tal, vilket jag tycker att eleverna som svarade att talföljden blir lika med 1 gör.

Min undersökning visar att majoriteten av eleverna tror att talföljden går emot ett samt att dess gränsvärde är 1 men inte att den är lika med 1. Enligt Cornu (1991) uppfattar personer uttrycket *går emot* på olika sätt, antingen tror de att man kommer fram eller att man nästan kommer fram. Tall (1980) fick fram i sin undersökning att elever har svårt att inse att när $s_n \to s$ blir s_n lika med s. Detta är något jag också ställer mig tveksam till att s_n får gränsvärdet s är självklart men inte att de blir lika med varandra

Andra uppgiften i undersökning var om huruvida en cirkel blir fylld eller ej. Undersökningen visade att de flesta elever i undersökningen tror att det alltid finns en bit kvar trots att man har delat den oändligt antal gånger, biten blir godtyckligt liten som någon svarade och godtyckligt liten tror eleverna har ett värde större än noll. Vilket i det här fallet är korrekt, eftersom talföljden konvergerar och får gränsvärdet ett men aldrig blir lika med ett. Det finns en fara enligt Tall (1980) att elever ser oändligheter som ett tal, detta medför konflikter både när det gäller oändligt stora tal samt oändligt små tal. En elev svarade att sista termen i talföljden blir $\frac{1}{\infty}$ som är lika med noll. Detta visar på att begreppsbilderna och begreppsdefinition inte samspelar hos eleven och därför saknas förståelsen enligt Tall och Vinner (1981). Jag tror också att eleverna försöker skapa sig en bild av cirkeln och ser då att om man delar den finns det alltid en bit kvar. Genom att skapa en bild här tror jag kan få konsekvenserna att elever inte tror att talföljden konvergerar eftersom det alltid finns en bit kvar, därför bör man som Davis och Vinner (1986) skriver att man ska undvika att skapa egna mentala bilder för att förstå gränsvärden, hur detta ska ske ges dock ingen beskrivning.

I undersökningen fanns en uppgift om Zenons paradox, där går de oändligt många sträckorna mot ett visst avstånd som Akilles och sköldpaddan möts. Även den här talföljden var det fler elever i undersökningen som inte kunde ge ett korrekt svar på, jämfört med dem som gav ett korrekt svar. De som har klarat av uppgiften har också insett att en godtyckligt liten sträcka inte har någon mening i detta fall. Tall (1980) menar att för att hantera gränsvärden måste man släppa tankegången om reella tal, det håller jag med om.

5.1.2 Kontinuitet

När det gäller kontinuitet verkar eleverna i min undersökning ha dålig förståelse för det. Av dem som visste vad det var visste endast en av dem att funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ är kontinuerlig i sin definitionsmängd. Jag håller med Tall och Vinner (1981) och Cornu (1991) att när kurvan får ett avbrott uppfattar eleverna inte kurvan som kontinuerlig. Men eftersom majoriteten av eleverna i undersökningen inte ens visste vad kontinuitet är, går det inte att dra några andra slutsatser än den att majoriteten inte vet vad det är. Det är för få som vet vad det är för att sen kunna urskilja vad som är svårt.

5.1.3 Asymptoter

Om funktionen når fram till sina asymptoter var min sista fråga under intervjun, endast en av de tio intervjuade svarade att den gör det. De andra nio hade helt rätt och svarade att den inte gör det. Den elev som svarade att den gör det svarade att den måste nå fram eftersom de har samma värde i funktionens gränsvärde, vilket visar att eleven har tänkt till men inte har insett att funktionen fast den har samma gränsvärde ändå inte når fram.

5.2 Metoddiskussion

Jag tror att tillförlitligheten i den empiriska studien är hög, eftersom de svar som jag fick från intervjuerna gav en representativ bild av matematik E klasserna. Pilotintervjun var bra eftersom den gav mig självförtroende inför intervjuerna som Kvale (1997) menar.

Under intervjuerna tänkte jag hela tiden på att inte ge eleverna några ledande frågor. Jag kan dock ha påverkat svaren med mitt kroppsspråk eller mina kommentarer omedvetet. När jag lyssnade igenom banden och skrev ner intervjuerna har jag försökt vara så objektiv som möjligt, men när jag tolkar svaren kan det ha gjorts i någon viss riktning.

5.3 Pedagogiska konsekvenser

Studien visar att vissa av eleverna saknar kunskap om gränsvärden när det gäller såväl talföljder som förståelse för orden *går emot* och *kontinuitet.* Det är därför viktigt att vi som pedagoger förklarar innebörden av dessa ord eftersom eleverna kan tolka orden olika beroende på i vilka kontexter de har använts innan, enligt Cornu (1991). När det gäller förståelsen för gränsvärden ska man inte försöka bygga upp en egen mental bild av problemet, då gränsvärden inte kan hanteras som reella tal enligt Davis och Vinner (1986). Det är viktigt som Tall och Vinner (1981) poängterar att begreppsbilderna och begreppsdefinitionerna måste samverka för att en fullständig förståelse ska finnas. Jag förespråkar modellen som Tall och Vinner presenterar för att sammanlänka begreppsbilder och begreppsdefinitionen, detta enligt en spiralmodell. Todorov (2001) menar däremot att gränsvärden knappt behövs eftersom det är för svårt att förstå, det är därför bättre att använda sig av infinitesimaler. Den uppfattningen delar inte jag med Todorov, eftersom gränsvärden behövs förr eller senare.

Under arbetets gång har nya frågeställningar väckts. Det hade varit intressant att vidareutveckla syftet genom att göra en större studie. Man skulle exempelvis ha kunnat följa med olika klasser där olika lärandeteorier har använts, för att se om någon skillnad i förståelse finns mellan klasserna.

6 Sammanfattning

Syftet med arbetet var att belysa vad elever har för förståelse av begreppen gränsvärde och oändlighet samt hur de hanterar dessa. Detta för att kunna ge mig och andra pedagoger än bättre insikt i hur det ska hanteras. Min problemformulering:

- Hur ser elever som läser Matematik E på begreppet gränsvärde?
- Hur hanterar elever som läser Matematik E begreppet gränsvärde?

Jag valde att intervjua tio stycken elever från olika matematik E klasser. Syftet var att undersöka hur elever uppfattar och hanterar gränsvärden. Den empiriska studien visar att de flesta elever inte har förståelse för gränsvärden. Undersökningen visar att elever tror att när en funktion går emot ett och har gränsvärdet ett inte blir ett. Studien visar även att tre av tio elever inser att ett oändligt antal sträckor kan gå emot ett visst avstånd, som det gör i Zenons paradox. Undersökningen visar även att elever tror att något godtyckligt litet är ett tal större än noll. De slutsatser som jag kan dra utifrån mitt arbete är att elever saknar förståelse för vissa grundläggande begrepp som *kontinuitet* och *går emot*. Jag kan även dra slutsatsen att samspelet mellan begreppsbilder och begreppsdefinitioner är väsentligt för en förståelse för gränsvärden. Detta kan nås genom att använda Tall och Vinners (1981) spiralmodell för att länka samma begreppsbilder med begreppsdefinitioner.

Referenser

Bjurwill, C. (2001). *A, B, C och D – Vägledning för studenter som skriver akademiska uppsatser.* Lund: Studentlitteratur.

Cornu, B. (1991). Limits i D. Tall, *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. S. 153-166

Davis, R. & Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages. *Journal of mathematical behaviour* 5, 281-303

Denscombe, M. (2000). *Forskningshandboken – för småskaliga forskningsprojekt inom samhällsvetenskaperna.* Lund: Studentlitteratur.

Kvale, S. (1997). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the learning of mathematics* 11(3), 20-24

Patel, R. & Davidson, B. (2003). *Forskningsmetodikens grunder: att planera, genomföra och rapportera en undersökning.* Lund: Studentlitteratur.

Piaget, J. (1972). *Psykologi och undervisning.* Stockkolm: Bonniers.

Råde, L. & Westergren, B. (1998). *Mathematics Handbook for Science and Engineering.* Lund: Studentlitteatur.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics* 18, 371-397

Stensmo, C. (1994). *Pedagogisk filosofi.* Lund: Studentlitteratur.

Szydlik, J. (2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. *Journal for Research in Mathematics Education* 31(3), 258-276

Tall, D. (1980). Mathematical Intuition, with Special Reference to Limiting Processes. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 170-179

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169

Todorov, T. (2001). Back to classics: teaching limits through infinitesimals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 32(1), 1-20

Tirosh, D. (1991). The role of students´ intuitions of infinity in teaching cantorian theory i D. Tall, *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. S. 199-214

Utbildningsdepartementet. (2006). *Läroplan för de frivilliga skolformerna Lpf 94*. Ödeshög, Danagårds grafiska.

Vetenskapsrådet. (2007). *Forskningsetiska principer – inom humanistisk- samhällsvetenskaplig forskning.* Elanders Gotab.

Vygotskij, L. (1926). *Educational psychology.* Florida: St. Lucie press.

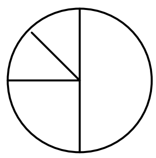
Bilaga 1; Intervju om gränsvärden

Fråga 1:
Vad händer med den här serien 0,99999… (oändligt antal nior)

Ett eller flera alternativ kan vara rätt, förklara hur du tänker på varje.

a) blir dess gränsvärde 1
b) blir den lika med 1
c) går den mot 1
d) den blir väldigt nära 1 men når aldrig fram

Fråga 2:
Vad händer om man har en cirkel och fyller den först med hälften och sen fyller nästa hälft med hälften o.s.v.



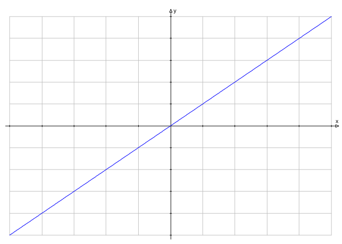
Om man skulle skriva den som en serie skulle den se ut som 1/2 + 1/4 + 1/8…
Vad händer med den här serien? Kommer cirkeln någonsin att bli fylld?

a) Ja, den blir fylld. (förklara hur du tänker)
b) Nej, den blir inte fylld. (förklara hur du tänker)

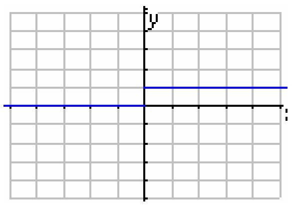
Fråga 3:
Vilka av följande funktioner är kontinuerliga? (Förklara hur du tänker)
Har följande funktioner några gränsvärden eller asymptoter? (Förklara hur du tänker)

a) $f(x)=1/x \ (x\neq 0)$

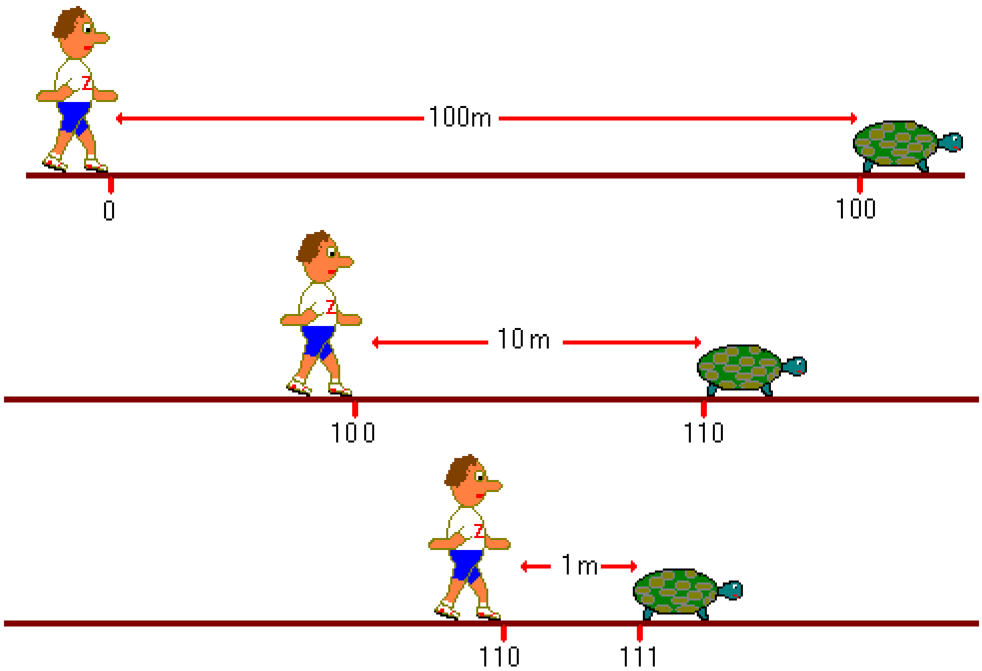
b) $f(x)=x$



c) $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$



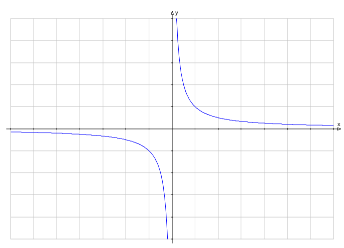
Fråga 4:
En klassisk paradox är Zenons paradox.
Akilles och en sköldpadda ska tävla om vem som kommer först till ett visst mål. Akilles springer snabbare än sköldpaddan och startar bakom sköldpaddan. När startskottet går så har de vissa positioner. När Akilles kommer fram till den position som sköldpaddan hade vid starten har sköldpaddan kommit en liten bit. För att Akilles ska komma om sköldpaddan måste han passera den punkt sköldpaddan nu är i. När den kommer dit så har sköldpaddan kommit ytterligare en bit, osv. Du fattar nog var det hela slutar, d.v.s. med att Akilles alltid måste passera ännu en punkt innan den når sköldpaddan.



Det är ju självklart att Akilles springer om sköldpaddan i verkligheten, försök förklara varför Zenons modell inte stämmer.

Fråga 5:
Funktionen $f(x)=1/x$ har två asymptoter i det här fallet en längs y-axeln och en längs x-axeln. Kommer funktionen någon gång att nå fram till asymptoten, d.v.s. att den tangerar den?

a) Nej den når aldrig fram (förklara hur du tänker)
b) Ja den når fram och tangerar (förklara hur du tänker)



Bilaga 2; Utdrag ur intervjusvaren

Intervju 1:

I (Intervjuare): Nu intervjuas person ett. Fråga ett är vad händer med den här serien 0,9999… om man har ett oändligt antal nior, har du någon tanke nu direkt?

E1 (Elev 1): Ja den kommer väl rätt nära ett.

I: Kommer den att nå fram till ett?

E1: Inte riktigt.

I: okej, inte riktigt. Vi hade några olika alternativ härnere. Ett eller flera alternativ kan vara rätt, förklara hur du tänker. Vi börjar med a blir dess gränsvärde 1?

E1: mmm, hahaha.

I: Var det ett ja eller nej?

E1: Ja det blir den nog.

I: Blir den lika med ett?

E1: Nej.

I: Går den mot ett?

E1: Det gör den.

I: Okej, blir den nära ett men når aldrig fram?

E1: ja.

I: Då lämnar vi uppgift ett och går till uppgift två. Här har vi en cirkel som fylls på, först fylls hälften på sen dess hälft och sen dess hälft och så vidare.

E1: ja

I: Serien för den här skulle se ut som en halv plus en fjärdedel plus en åttondel och så vidare. Kommer den här cirkeln att bli fylld? Ja eller nej, och förklara hur du tänker.

E1: Alltså om man går tillräckligt långt blir det svårt att se för det blir så litet. Men jag tror inte att den blir helt fylld.

I: Då tar vi fråga tre här. Det som hänger ihop med gränsvärden är om de är kontinuerliga eller ej samt om de har asymptoter. Här finns några olika funktioner, vi börjar med f(x)=1/x där x inte får vara noll. Är den kontinuerlig? Har den några asymptoter eller gränsvärden?

E1: Nej den är inte kontinuerlig om man ser hela, men innan noll är den kontinuerlig och efter noll, så ser man två delar är varje del kontinuerlig. Ja det finns en asymptot när x=0.

I: Har den någon mer asymptot?

E1:Ja en lodrät, längs y-axeln.

I: Nästa funktion är f(x)=x, är den kontinuerlig?

E1: Ja

I: Har den något gränsvärde eller någon asymptot?

E1: nej

I: Då vänder vi på bladet, så har vi en funktion till. Har du sett att man kan skriva en funktion såhär?

E1: ja

I: Den här funktionen har värdet 0 när x är mindre än noll och värdet 1 när x är större eller lika med noll. Är den här funktionen kontinuerlig och har den någon asymptot eller något gränsvärde?

E1: Nej den är inte kontinuerlig. Heller inget gränsvärde eller asymptot.

I: Nästa uppgift är en klassisk paradox nämligen Zenons paradox. Det är Akilles och en sköldpadda som ska tävla, Akilles springer snabbare än sköldpaddan med startar bakom sköldpaddan. Det som händer är att Akilles springer mot sköldpaddan men när han kommer fram till där sköldpaddan var har sköldpaddan förflyttat sig till en ny position. När Akilles har sprungit fram till den positionen har sköldpaddan kommit fram till en ny och så vidare. Alltså kommer Akilles aldrig ifatt sköldpaddan.

E1: ja

I: Men i verkligheten skulle ju Akilles springa om sköldpaddan. Vad är felet med Zenons tanke?

E1: Ja, alltså teoretiskt stämmer det. Om man tänker som Zenon. Men detta går inte att översätta till praktiken. Teoretiskt stämmer detta men teori och verklighet är olika saker.

I: Sista frågan, funktionen 1/x har två asymptoter en längs y-axeln och en längs x-axeln, så nu fick du reda på det. Kommer funktionen någon gång att nå fram till asymptoterna det vill säga att tangera de, Ja eller Nej? Förklara hur du tänker.

E1: Nej det kommer den inte för det är väl det som är en asymptot. Att den går mot men aldrig kommer fram.

I: Då tackar jag för att du ställde upp.

E1: Varsågod.

Intervju 5:

I: Intervju nummer fem. Vad händer med den här serien 0,9999 om man har ett oändligt antal nior.

E5: Det blir ett.

I: Vi har lite olika alternativ här. Ett eller flera kan vara rätt. Kan du diskutera lite utifrån varje?

E5: Dess gränsvärde är ett.
I: Går den mot ett?
E5: D är nog fel när man sätter in oändligheten. Den borde gå emot ett eftersom den blir ett.
I: Okej då går vi till andra uppgiften. Om man har en cirkel och fyller hälften och sen den hälften som blir över och sen dess hälft och så vidare.
E5: Ja.
I: Om man ser det här som en serie skulle det vara en halv plus en fjärdedel plus en åttondel plus en sextondel och så vidare. Min fråga är då kommer den här cirkeln någonsin att bli fylld?
E5: Ja sätter man in oändligheten blir den fylld för den sista termen i serien blir då 1 genom oändligheten som är noll. Sen kan du inte gå längre. Då måste den vara fylld
I: Nästa fråga handlar om olika funktioner. Om de är kontinuerliga eller ej, samt om de har asymptoter eller gränsvärden? Första funktionen är 1/x och då måste x vara skiljt från noll.
E5: Den är kontinuerlig, samt en asymptot längs x-axeln och en längs y-axeln fast inget gränsvärde. Den andra här y lika med x är kontinuerlig fast har ingen asymptot.
I: Sen har vi en tredje funktion här, y är noll när x är mindre än noll och y är ett när x är antingen lika med noll eller större än noll.
E5: Nej den är inte kontinuerlig för den är avbruten.
I: Har den någon asymptot eller något gränsvärde?
E5: Nej
I: Nästa fråga handlar om en klassisk paradox nämligen Zenons. Har du hört talas om den?
E5: Nej
I: Det är Akilles och en sköldpadda som ska tävla.
E5: Okej
I: Akilles springer snabbare än sköldpaddan och startar bakom sköldpaddan. Det som händer är att Akilles springer mot sköldpaddan men när han kommer fram till där sköldpaddan var har sköldpaddan förflyttat sig till en ny position. När Akilles har sprungit fram till den positionen har sköldpaddan kommit fram till en ny och så vidare. Alltså kommer Akilles aldrig ifatt sköldpaddan. Men det är ju självklart att man kan springa om varandra i verkligheten, så varför stämmer inte Zenons modell?
E5: haha. Avståndet minskar hela tiden, de kommer att bli jämsides till slut.
I: Men kommer inte sköldpaddan hela tiden till en ny punkt?
E5: Nja, det blir ju en oändligt liten sträcka mellan de därför blir de jämsides.

I: Sista frågan nu. Har man funktionen 1/x så har den två asymptoter en längs x-axeln och en längs y-axeln. Frågan är; kommer funktionen någonsin att nå fram till asymptoten och tangera den?

E5: Vänta nu, ja det kommer de. Deras gränsvärde är ju på asymptoterna så ja när man går i oändligheten på x.

I: Då tackar jag så hemskt mycket.