HÖGSKOLAN KRISTIANSTAD

Lärarutbildningen
Examensarbete
Våren 2005

Gymnasieelever löser andragradsekvationer

Handledare:
Lena Löfgren

Författare:
Marie Nordgren

Gymnasieelever löser andragradsekvationer

Av

Marie Nordgren

Handledare Lena Löfgren

Abstract

Vilka svårigheter finns när gymnasieelever löser andragradsekvationer?
Författarens erfarenheter från den verksamhetsförlagda delen inom lärarutbildningen, visar att gymnasieelever har svårt för att lösa andragradsekvationer. Syftet med uppsatsen är att belysa de problem som uppstår när gymnasieelever löser andragradsekvationer. Undersökningsmetoden har varit av kvalitativ art. Samtal med elever som löser ekvationer av andra graden har bandats. Eleverna har tydligt förklarat hur de går tillväga vid varje uppgift. Undersökningen har visat att elevernas grundläggande kunskaper i matematik är av stor betydelse när det gäller hur eleverna klarar att lösa andragradsekvationer. Analysen visar att det är viktigt från lärarens sida att ta reda på vilken nivå eleverna är i matematik och algebra. För att de ska kunna få bättre kunskaper om och hur man löser andragradsekvationer, behöver eleverna mer tid på sig till kursen Matematik B.

Ämnesord: matematikundervisning, algebra, andragradsekvationer, gymnasieelever, intervjuer

INNEHÅLL

INNEHÅLL 3
1. Inledning med bakgrund och syfte 5
2. Teori 5
  2.1 Lärandet 5
  2.2 Algebra i skolan 7
    2.2.1 Algebra 8
    2.2.2 Andragradsekvationer 9
  2.3 Tidigare forskning i algebra 10
    2.3.1 Att lösa ekvationer eller att förenkla uttryck 10
    2.3.2 Variabler 11
    2.3.3 Huvudräkning - bråkform eller miniräknare - decimalform 12
    2.3.4 Teckenfel 13
    2.3.5 Tidsfaktorn 14
  2.4 Problemformulering 14
3. Metod 14
  3.1 Förberedelser med urval av skola och elever 15
  3.2 Beskrivning av undervisningen för elevgruppen som undersöktes 15
  3.3 Intervju 16
  3.4 Forskningsetik 16
  3.5 Transkribering och bearbetning 17
4. Resultat 17
  4.1 Första uppgiften 17
  4.2 Andra uppgiften 19
  4.3 Tredje uppgiften 21
  4.4 Fjärde uppgiften 22
  4.5 Femte uppgiften 23
  4.6 Bråk 24
  4.7 Teckenfel 24
  4.8 Formler 24
  4.9 Jämförelse mellan uppgifterna 24
5. Diskussion 25
  5.1 Bråk 25

5.2 Teckenfel ... 26
5.3 Formler ... 27
5.4 Jämförelse mellan uppgifterna ... 28
5.5 Tid ... 29
5.6 Förståelsen ... 30
5.7 Avslutande kommentarer ... 31
6. Sammanfattning ... 32
Referenser ... 34
Bilaga I - II

1. Inledning med bakgrund och syfte

Matematik är ett viktigt skolämne, men många har svårt för det. På gymnasiets samtliga program läser man Matematik A. När eleverna läst Matematik A på gymnasiet tvekar många att fortsätta. För de som fortsätter uppstår ofta problem vid räkning med andragradsekvationer. Det finns tydligt angivet i kursplanen för Matematik B vad eleverna ska kunna om algebra och andragradsekvationer efter avslutad kurs. I kursplanen står följande om målen: *Eleven skall kunna tolka, förenkla och omforma uttryck av andra graden samt lösa andragradsekvationer och tillämpa kunskaperna vid problemlösning. Eleven skall kunna förklara vad som kännetecknar en funktion samt ställa upp, tolka och använda några ickelinjära funktioner som modeller för verkliga förlopp och i samband därmed kunna arbeta både med och utan dator och grafritande hjälpmedel* (Skolverket, 2005). För att alla elever ska kunna uppnå målen efter avslutad kurs, krävs att de har en förståelse för vad en andragradsekvation är och att de kan lösa olika typer av andragradsekvationer. Hur kan då en blivande lärare hjälpa dem att uppnå dessa mål? Syftet med uppsatsen är att belysa problem som uppstår när gymnasieelever löser andragradsekvationer.

2. Teori

2.1 Lärandet

I vår kultur spelar lärandet en stor roll för samhällsutvecklingen. Lärandet är ett resultat av mänsklig verksamhet. Dagens lärande ligger inte enbart i händerna på skolan, utan det sker överallt i samhället. En del av det vi lär oss idag är detsamma som man lärde sig för hundra år sedan, men idag måste vi lära oss mycket mer och om helt skilda fenomen från då. Även idag är det skillnad på vad man lär sig, beroende på vilken kultur man lever i. Vårt högteknologiska samhället styr vad vi behöver lära oss för att kunna fungera och tillföra något i vårt samhälle (Säljö, 2000).

Jean Piaget (1896-1980) forskade om hur mänsklig kunskap bildas. Han menade att kunskap uppstår genom människans egna handlingar, då hon skapar och konstruerar sin egen kunskap. Den verklighet som vi upplever är konstruerad av oss själva. Här delar sig konstruktivismens lära i två grenar. En del menar att man lär sig var för sig (individuellt), medan andra menar att vi lär oss i samspel med varandra (socialt). Vygotskij (1869-1934) står för den sociala grenen (Carlgren & Marton, 2000). Han menar att människans lärande alltid är relaterat till det sociala och kulturella sammanhang hon befinner sig i (Granberg & Ohlsson, 2004). För att en begreppsutveckling alls ska ske, måste undervisningen med ett socialkonstruktivistiskt synsätt befinna sig i den närmaste utvecklingszonen. Det är viktigt att utgå från vad eleverna kan och var deras förståelse ligger, för de måste börja bygga på sina gamla kunskaper för att de ska kunna utvecklas och ta till sig nya (Persson, 2005). Enligt Piaget konstruerar individen själv sina kunskaper när han eller hon samspelar med sin omgivning (Marton & Booth, 2000).

Säljö (2000) menar att människans lärande formas av deltagande i kulturella aktiviteter, och att det är strängt kopplat till hur hon använder sig av de redskap som utvecklats och finns i kulturen. En människa kan aldrig undvika att lära sig. *”Genom språket har vi också en - i jämförelse med andra arter - unik förmåga att dela erfarenheter med varandra”* (Säljö, 2000 s. 34). Lärandet är en av de verksamheter som människan alltid har ägnat tid åt. Hon har alltid lärt sig saker och delat med sig till andra av sina kunskaper. Det är också så att oftast kan vi lösa problem, som vi inte kan lösa självständigt, i samspel med andra människor.

Då det finns en variation i hur olika människor uppfattar samma fenomen, gör det också att de får skilda minnen och erfarenheter av fenomenet. De tar till sig olika delar av fenomenet på olika sätt, och formar var för sig sin helhet i sitt eget medvetande. Den fenomenografiska forskningens grundenhet (ett sätt att erfara någonting), är en intern relation mellan den som erfar och det som erfars. Eftersom det är en intern relation medför det att den interna relationen inte hade varit densamma om antingen den som erfar eller det som erfars hade ändrats. När man erfar något kopplar man det till situationen i vilken man erfor fenomenet (Marton & Booth, 2000). *”För att kunna erfara någonting som någonting måste vi kunna urskilja det från och relatera det till ett sammanhang, urskilja dess delar och relatera dem till varandra och helheten”* (Marton & Booth, 2000 s. 143).

Variationsteorin har utvecklats ur den fenomengrafiska forskningsinriktningen. (Marton & Booth, 2000). Människor fungerar på olika sätt när det gäller lärande, därför lär de sig också olika saker även om de ställs inför samma uppgift. *”De har olika innebörder av vad lärande är, och eftersom de ser situationen som en inlärningssituation, får den följaktligen olika innebörder för dem”* (Marton & Booth, 2000 s. 55). Marton och Booth (2000) menar att man inte kan tala om saker för människor och sedan tro att de kan det. Ingen kan lära någon annan någonting, man måste själv lära sig och själv ta till sig och förstå nya fenomen. De menar att det nya man lär sig bygger på gamla kunskaper, och att det gamla förändras till något nytt.

Marton och Säljö gjorde 1976 en studie tillsammans, där de undersökte vilken metod universitetsstuderande använde sig utav för att lära sig innehållet i en text. De kom fram till att det fanns två olika sätt, vilka de kallade för yt- respektive djupansats. De studenter som använde sig av ytansats försökte ordagrant memorera texten, medan de andra studenterna som använde sig av djupansats fokuserade på förståelsen av texten istället för att memorera vad där stod. Efteråt undersökte Säljö och Marton vad studenterna lärt sig, och kom fram till att de studenter som använt sig av djupansats vanligtvis hade fått en bättre förståelse av textens huvudpoäng, medan de andra studenterna missade just huvudpoängen (Sandberg & Targama, 1998).

Carlgran och Marton (2000) skriver att elever inte tar emot kunskap utan skapar den själv i förhållande till sin egen kontext. De skapar aktivt skilda innebörder utifrån sina skilda bakgrunder.

Lärande är dels att besitta information, ha färdigheter och förståelse, men också att veta när man ska använda sig av en viss information. För att eleverna ska kunna få ut så mycket av sitt lärande som möjligt, är det viktigt att läraren har en handledande roll och vägleder eleverna på deras väg mot mer kunskap (Säljö, 2000). Som lärare kan man förmedla kunskap, men man kan inte lära ut någonting till eleverna. Eleverna måste själva vara delaktiga i den processen, och tillskansa sig själva kunskap för att sedan kunna ta fram den och använda den vid rätt tillfälle (Marton & Booth, 2000). Lärande slutar inte när man slutar skolan, utan det fortsätter hela livet och ses idag som evigt. Man uppmuntrar människor att lära sig för livet och att lära sig hela livet. Ett så kallat livslångt lärande (Marton & Booth, 2000).

2.2 Algebra i skolan

Skolans matematikundervisning syftar, enligt kursplanen, till att eleverna självständigt ska kunna hantera matematikens språk och symboler, som är likartade internationellt (Skolverket, 2005). Vidare under *mål att sträva mot* kan man läsa: *Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer, utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer, utvecklar sin förmåga att tolka en problemsituation och att formulera den med matematiska begrepp och symboler samt välja metod och hjälpmedel för att lösa problemet* (Skolverket, 2005). I kursplanen för Matematik B står det under mål, att eleverna ska kunna lösa andragradsekvationer och kunna tillämpa sina kunskaper om andragradsekvationer vid problemlösning. Eleven ska också kunna omforma och förenkla uttryck av andra graden (Skolverket, 2005).

I kursplanen för Matematik A står det: *eleven skall ha fördjupat och vidgat sin taluppfattning till att omfatta reella tal skrivna på olika sätt* (Skolverket, 2005). Då borde eleverna ha med sig goda kunskaper i hur man till exempel räknar med tal i bråkform, från Matematik kurs A. I betygskriterierna i Matematik B för betyget Godkänd krävs det att man använder matematiska termer när man pratar matematik. Elever ska också förstå innebörder av olika symboler och uttrycka sina matematiska beräkningar och resonemang på ett sådant sätt att de är lätta att följa och förstå. De ska också kunna pröva sina egna lösningar (Skolverket, 2005).

I kursplanerna för gymnasieskolan står det att man ska bygga på elevernas tidigare kunskaper. De borde då ha med sig de kunskaperna från grundskolan till gymnasiet. Eleverna måste själva kunna ställa upp en ekvation utifrån en problemsituation, lösa ekvationen och sedan kunna tolka resultatet i förhållande till det ursprungliga problemet. Eleverna måste själva kunna tilldela symbolerna en innebörd och sen kunna tolka lösningen i det ursprungliga sammanhanget. Efter det att eleven har formulerat ekvationen, gäller det främst att lösa den. Då kan man för en stund bortse från det ursprungliga problemet, för att sedan kunna tolka ekvationslösningen och koppla tillbaka den till problemet igen. Ekvationslösning ska användas som ett redskap vid problemlösning, då är det viktigt att eleverna inte bara kan hantera symbolerna utan att de också har en förståelse för vad de gör och varför. Ett problem idag är att de flesta elever kan lösa ekvationer, men de har svårt för att själva se hur de ska kunna använda sig av dem för att lösa problem. En förklaring till detta kan vara att man idag i skolan lär sig lösa ekvationer mekaniskt efter vissa regler och att man saknar förståelse för vad det är man gör (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997).

2.2.1 Algebra

Algebra är en av huvudgrenarna i ämnet matematik, och delas in i olika undergrupper, där man räknar med bokstäver i stället för siffror. Fördelen med det är att man får allmängiltiga lösningar, som kan användas för likartade problem. Det handlar om att lösa ekvationer med en eller flera obekanta variabler. På gymnasieskolan idag lär man sig lösa andragradsekvationer med hjälp av formler. Man använder sig av ett symbolspråk som har utvecklats under cirka 400 år.

Utvecklingen av algebran står araberna för, och ordet algebra fanns i titeln på en matematisk bok skriven redan på 800- talet av den arabiska matematikern al-Kowarizmi. Algebra kommer från det arabiska ordet al-jabr, vilket betyder lägga ihop. I boken beskriver han hur man ska lösa uppgifter med en okänd term. Han var inte den första att beskriva hur man löser ekvationer med en okänd term på detta sätt, metoden var 3000 år gammal och redan känd i Egypten, Babylonien, Indien och Kina. Al-Kowarizmi inspirerades av indisk och babylonisk matematik. Läroboken skrev han för att den skulle kunna användas av handelsmän, sjömän och byggare (Dahl, 1991). Med hjälp av algebran och andragradsekvationen kunde de babylonska byggarna använda sig av Pythagoras sats för att räkna ut hur de skulle gå tillväga vid olika byggnationer (Thompson, 1996).

Elever uppfattar algebran i skolan på olika sätt. En del tycker att den är svår och obegriplig, medan andra tycker att den är rolig och spännande. Vi måste möta svårigheterna genom att kunna koppla problem och uppgifter till verkligheten. På så sätt kan eleverna själva bygga på sina egna erfarenheter och har något att hänga upp sina nyförvärvade kunskaper på. Det är också viktigt att vi lägger grunden för algebran i de tidiga åren i skolan. Har de goda grunder i aritmetiken med sig upp, har de också lättare för att ta till sig algebran och skapa sig en förståelse för den (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997). Varför ska alla kunna algebra? Med algebra kan många fenomen beskrivas med samma matematiska verktyg. Det algebraiska språket är för oss ett standardverktyg för att kunna hantera tal och funktioner, och samtidigt inte att förglömma en grund för vidare studier. Därför är det viktigt att alla elever får chansen att lära sig använda detta språk. Men att lära sig algebra tar tid, och lärandet måste få utvecklas under lång tid för att man ska kunna förstå algebran och använda sig av den. Matematiska modeller används på alla nivåer i samhället, och då bygger de oftast på algebraiska formler. Många elever upplever algebran som abstrakt och svårbegriplig. När de inte lyckas förstå algebran direkt, tappar många intresset och får en negativ inställning till hela matematikämnet. För att man ska lyckas i algebraundervisningen, måste man göra lektionerna levande och koppla den till elevernas verklighet (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997).

2.2.2 Andragradsekvationer

För att man ska ha lättare att följa det fortsatta resonemanget väljer jag här att definiera andragradsekvationen. En andragradsekvation är en ekvation som kan skrivas på formen: $ax^2 + bx + c = 0$. Här förekommer den obekanta termen x av andra graden. Den kan inte finnas med av högre grad i en andragradsekvation. För att det ska vara en andragradsekvation, måste $a \neq 0$, annars hade ekvationen blivit av en lägre grad. Den har alltid två lösningar, om inte båda lösningarna är samma, då är det en så kallad dubbelrot (Nationalencyklopedin, 2000). Rötterna kan dock vara komplexa, då kan man inte lösa ut dem utan att kunna räkna med komplexa tal. Vilket man inte lär sig förrän i Matematik E på gymnasienivå (Matematik 2000 kurs B och E, 1994, 1996).

Definitioner för en del matematiska begrepp, som används i texten nedan, finns att läsa i bilaga I.

2.3 Tidigare forskning i algebra

Här nedan försöker jag presentera en del av den forskningen som gjorts om algebra som är relevant för denna studie.

2.3.1 Att lösa ekvationer eller att förenkla uttryck

Många elever blandar ihop ekvationslösning och förenkling av algebraiska uttryck. Det är inte alls ovanligt att elever kan få ut ett värde på x, fast de bara ska förenkla ett uttryck. Trots att det inte står att uttrycket är lika med något, ”förutsätter” de att det är lika med noll och löser ut x. De har inte riktigt klart för sig vad det är för skillnad på ett uttryck och en ekvation. Därför är det viktigt att man som lärare tydliggör de olika fallen för eleverna och förklarar skillnaderna (Persson, 2005).

Persson (2005) skriver att det inte är ovanligt att elever har med sig missuppfattningar av begrepp och räkneregler från grundskolan. Det medför att de upprepar samma fel vid olika sorters beräkningar av andra matematiska problem såsom till exempel algebra i skolan.

För att kunna lösa ekvationer är det viktigt att eleverna vet vad likhetstecknet står för. Det vill säga att det vänstra ledet och det högra ledet är lika mycket. I de tidigare skolåren är det mycket vanligt att likhetstecknet utläses som blir istället för är lika med (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997).

För att elever ska kunna förstå algebraiska operationer, såsom andragradsekvationslösning måste de först ha en förståelse för den grundläggande aritmetiken. Perssons studie visar att man som lärare måste lägga ner mycket tid på att reda ut betydelsen av tecken, bokstäver och uttryck för att få med sig de eleverna som tycker att det är svårt med algebran i skolan (Persson, 2005).

Algebra handlar till stor del om ekvationslösning. Att man då kopplar funktioner till ekvationer i undervisningen i matematik är vanligt för att eleverna ska få en god förståelse för de olika begreppen och se likheterna mellan dem. Men man får inte glömma att också tydliggöra skillnaderna så eleverna inte blandar ihop begreppen. Genom att använda sig av funktioner kan man studera problem i en generell form. Till exempel kan man ställa upp arean av en rektangel som en funktion, där arean beror av sidornas längder som betecknas av variabler, eller bokstavssymboler (Unenge m fl, 1994).

2.3.2 Variabler

Många elever förstår inte vad bokstavssymbolerna i matematiken betyder och står för, utan de tolkar då symbolerna efter sina tidigare erfarenheter inom matematiken. De flesta uppfattar bokstavssymbolerna i en ekvation som ett specifikt okänt tal. Att det kan vara ett tal som varierar det vill säga en variabel, är mycket svårare att förstå. Många undersökningar på området visar att man bör inrikta undervisningen på att göra det levande för eleverna och bygga upp en förståelse i det algebraiska symbolspråket på ett tidigt stadium i undervisningen. Det är också viktigt att eleverna har en god taluppfattning och en god grund i aritmetiken för att kunna gå vidare inom matematiken och kunna förstå algebran. Det är mycket viktigt att eleverna får känsla för vad symbolerna står för. De måste också lära sig att självständigt lära sig använda formlerna när de ställer upp lösningar till egna problem (Bergsten, Häggström & Lindberg, 1997).

Marsha Hurtwitz (1990) menar att det är viktigt att förstå innebörden av matematiska symboler. Om man inte vet vad symbolerna betyder är de meningslösa, även om det är där elegansen i matematiken ligger. Olteanu (2000) menar att det inte är svårt för eleverna att räkna med bokstavssymboler, utan att svårigheterna istället ligger i att de inte förstår vad de har räknat ut och varför. Att lära sig hantera det algebraiska språket är ett måste om man vill gå vidare till högre stadium med sina studier i matematik. Att ha goda kunskaper inom till exempel bråkräkning är viktigt för att kunna hantera variablerna inom algebran.

2.3.3 Huvudräkning - bråkform eller miniräknare - decimalform

Redan i årskurs fem ska eleverna enligt kursplanen ha en grundläggande taluppfattning som omfattar de naturliga talen och enklare tal i bråk- och decimalform (Skolverket, 2005).

Löwing och Kilborn (2003) menar att eleverna som kommer till gymnasiet idag har svårt för huvudräkning. Eftersom miniräknaren har slagit igenom i skolan har huvudräkningen fått stå tillbaka. Många menar att överslagsräkning och huvudräkning är viktigare nu än någonsin, för att eleverna ska kunna uppskatta om svaret de fått är rimligt. Idag har det gått så långt i skolorna att eleverna räknar alla tal med hjälp av miniräknaren, istället för att räkna de talen som de kan med huvudräkning. Elever idag har väldigt svårt för att räkna med bråk, utan de väljer hellre att skriva om talen på decimalform och då ofta med hjälp av miniräknaren. Problemen som uppstår, är att de inte alltid kommer fram till ett exakt svar. De gör själva avrundningar, eller så gör miniräknaren det åt dem. Om de gör längre beräkningar och behåller bråkformen, riskerar de inte att få fel svar i slutet på grund av avrundningsfel. Elever har svårt för att genomföra beräkningar när bråktalen har olika nämnare. Då är det lättare att miniräknaren gör hela jobbet (Löwing & Kilborn, 2003). Anghileri (2000) skriver att elever har svårt att förstå hur stort ett decimaltal är i förhållande till talet ett. De tror att ett decimaltal blir större om man skriver dit fler nollor efter talet.

Olle Häggström skriver att för tio år sedan kunde man som lärare i matematik på högskolorna förvänta sig att eleverna kunde enkel bråkräkning när de kom till högskolan, men så är inte längre fallet. Han skriver också att många elever tappar intresset och greppet om matematiken redan under de tidiga åren i grundskolan, och att den fortsatta undervisningen i matematik för dessa elever blir en plåga. Han hävdar att mycket av det beror på att lärarna i skolan saknar egen förståelse av matematiken, och att de har allvarliga kunskapsluckor i ämnet som de är satta att undervisa i. Slutsatsen han drar är att det är fullt möjligt att tentera universitets- och högskolekurser i matematik, utan att själv ha tillräcklig förståelse för att kunna undervisa i ämnet (Häggström, 2005). Persson (2005) skriver att eleverna behöver ha en god uppfattning om och kunna använda sig av bråkräkning i skolalgebran för att på ett enkelt sätt kunna behärska beräkningarna i skolalgebran.

Filloy och Sutherland (1996) menar att det är svårt att motivera elever till att kunna hantera algebran utan miniräknare, när det till en mindre kostnad går att få tag på en symbolhanterande miniräknare idag. Det finns också datorprogram som är symbolhanterande och de har man också tillgång till på många skolor. Han menar att det är viktigt att man trots allt kan sin algebra. Hur ska vi annars förstå varför ett datorprogram inte klarar en viss typ av problem, och kunna programmera den till att kunna det. Dagens miniräknare är till väldigt stor hjälp även när det gäller att hålla reda på tecknen.

2.3.4 Teckenfel

Persson (2005) menar att i algebran blir det väldigt tydligt eftersom små fel, som ett teckenfel, ofta ger stora konsekvenser för svaret på uppgiften. Han menar att det är viktigt att läraren synliggör felen för eleven och försöker att diskutera med eleven för att få dem att förstå hur det egentligen ska vara. Att eleven fortsätter att lösa fler uppgifter av samma typ utan att förstå varför det blir fel och hur han ska tänka istället, ökar inte hans förståelse för algebraiska uppgifter som han försöker lösa.

Olteanu (2000) skriver att många elever har en begränsad uppfattning av negativa tal och minustecknets betydelse. Olteanu säger också att elever behöver träna mycket på operationer med negativa talför att bli tillräckligt säkra när de ska använda det i andra sammanhang i matematiken. Ett sådant är till exempel algebran och i vårt fall andragradsekvationslösning. I hennes undersökning visar hon också att eleverna blir bättre på operationer med negativa tal efter att de arbetat mycket med det i skolan. Många undersökningar visar att eleverna är väldigt osäkra när de ska lösa algebraiska uppgifter. Hon menar att de ofta beror på att eleverna saknar grundläggande begrepp i aritmetik, och att de inte kan koppla aritmetiken till algebran. Hon tycker inte att det är konstigt att eleverna har svårt för det, med tanke på att även Euler, som var en väldigt framstående matematiker, hade problem med negativa tal på sin tid. Hon menar att det är viktigt att man som lärare medvetandegör minustecknets tre olika betydelser för alla elever. De tre betydelserna är:

- För att visa att det är negativt.
- För att visa operationen subtraktion.
- För att beteckna ett motsatt tal.

Hon menar att för att eleverna ska utveckl en förståelse för negativa tal, måste man ge dem tid.

2.3.5 Tidsfaktorn

Persson (2005) skriver om tid som en anledning till att eleverna inte får en så god förståelse för algebran i skolan. Generellt sett ökar elevernas kunskaper om de får mer tid till ”träning” på algebraområdet. Eleverna i hans undersökning visar en positivare attityd gentemot matematiken och algebran då. De känner sig inte lika stressade, utan anser att de har mer tid till färdighetsträning och att de därför kan prestera bättre då de har en bättre förståelse för algebran. Han rekommenderar att timplanen ska utökas till 150 timmar, mycket med tanke på att eleverna har spridda kunskaper när de börjar gymnasiet.

Olteanu (2000) skriver att det kräver mycket tid och aktiva insatser från eleverna för att de ska kunna tillägna sig goda kunskaper och en god förståelse för algebran. Många elever uppfattar algebran som ett område där man ska använda sig av många olika regler, och att det gäller att komma på vilken regel man ska använda var. Det är då viktigt med mycket tid för att de ska kunna få en förståelse för hur dessa regler hänger samman.

2.4 Problemformulering

Tidigare forskning belyser problemen när gymnasieelever ska räkna algebraiskt. Syftet med min uppsats är att belysa problem som uppstår när gymnasieelever löser andragradsekvationer. Utifrån detta vill jag undersöka: Vilka är svårigheterna och varför har gymnasieeleverna svårt för att lösa andragradsekvationer?

3. Metod

Denna studie behandlar frågan om elever i gymnasieskolan har svårt för att lösa andragradsekvationer, och i så fall vilka svårigheterna är. Vikten i undersökningen läggs vid hur eleverna går tillväga för att lösa ekvationer av andra graden.

Metoden bygger på intervjuer med sex elever som går på en liten gymnasieskola. Eleverna går första året i gymnasiet och intervjuerna görs under vårterminen direkt efter att eleverna har genomfört avsnittet i skolan. De har haft prov på området och blir efter det intervjuade.

För att få svar på mina frågeställningar har jag valt att göra en kvalitativ studie. Anledningen till detta är att kunna förstå hur eleverna tänker när de löser ekvationer av andra graden. Den kvalitativa studien genomfördes som en mindre intervju, där sex elever deltog. Här fick eleverna ett papper med fem stycken uppgifter (se bilaga II), som de ombads lösa samtidigt som de förklarade hur de gick tillväga. Eleverna berättade överlag väldigt tydligt hur de tänkte när de löste uppgifterna. Jag inflikade också med frågor då de fastnade eller då de inte förklarat tillräckligt utförligt hur de tänkt och varför. Detta för att se om de arbetade mekaniskt efter ett mönster de lärt sig, eller om de förstod vad de gjorde.

3.1 Förberedelser med urval av skola och elever

Jag valde att göra studien under min verksamhetsförlagda del på lärarutbildningen. Studien genomfördes på en gymnasieskola i södra Sverige. Gymnasieskolan ligger i en liten by i nordöstra Skåne och är mycket liten.

Gruppen jag valde bestod av elever från naturvetenskapsprogrammet, teknikprogrammet och samhällsvetenskapsprogrammet. Skolan är en mycket liten gymnasieskola, som även erbjuder viss teknisk utbildning till företag i dess omnejd. Eftersom skolan är mycket liten, läser de tre ovannämnda programmen tillsammans i en klass i ämnet matematik. Gruppen läste Matematik B, där andragradsekvationer ingår som en viktig del. Skolan har valt att dela in gruppen i två nivågrupper vid ett av de tre lektionstillfällen i veckan. Nivågrupperingen är flexibel och eleverna kan själva välja att byta grupp om de så önskar.

Under praktiken har jag själv undervisat eleverna i avsnittet. I slutet av praktiken genomfördes ett prov på denna del av kursen. Efter provet genomförde jag intervjuer med en liten grupp elever. Bland eleverna som intervjuades finns elever från båda nivågrupperna. Elevernas valdes ut av mig, med viss assistans från mina handledare. Jag valde två elever som hade betyget G i Matematik A, två elever som hade betyget VG i Matematik A och två stycken som hade betyget MVG i Matematik A, för att på detta sätt se om det fanns någon spridning mellan elevernas kunskaper och förståelse när de anses ha olika förkunskaper med sig från tidigare kurser.

3.2 Beskrivning av undervisningen för elevgruppen som undersöktes

Till mitt förfogande för undervisningen på avsnittet polynom och andragradsekvationer, hade jag 15 timmar under fem veckor. Jag har under denna period själv lagt upp undervisningen, i dialog med handledaren. Eleverna har normalt fyra matematiktimmar i veckan, men på grund av studiedagar och andra aktiviteter försvann en del tid. De två sista timmarna gick bort på grund av skrivningen. Av de fyra matematiktimmarna, som eleverna normalt har per vecka, är två undervisningstillfällen enkeltimmar och ett är dubbeltimme. Efter elevernas prov intervjuades de sex eleverna i samband med att de löste fem uppgifter. Dessa fem uppgifter gjorde jag efter det att undervisningen på området var avslutad.

Undervisningen hade ofta formen av föreläsning. Alla elever var aktiva under föreläsningen, svarade på frågor och ställde själva frågor som ledde oss framåt. Att undervisningen genomfördes i denna form beror till stor del på tidsbrist. För att eleverna skulle ha en rimlig chans fanns där inte mycket utrymme för så mycket varierad undervisning. Den delen av kursen som jag undervisade hade vi en extra stor tidsbrist, eftersom handledarna ville att jag skulle kunna konstruera provet och även rätta det åt eleverna innan praktiken var slut.

De två sista frågorna i intervjun var exakt samma som på provet, men eleverna fick inte tillbaka det förrän efter intervjun och har därför inte haft chansen att se lösningarna. Att jag valde dessa två frågor, var för att jag fann dem intressanta när jag rättade deras prov.

3.3 Intervju

Intervju är ett samtal mellan två människor, där den intervjuade kan förklara hur han eller hon tänker. Hade jag valt att göra en kvantitativ undersökning, hade jag bra fått elevernas uträkningar på ett papper. Jag ville ta reda på hur de går tillväga när de löser andragradsekvationer men också hur de tänker. Har de förståelsen eller räknar de bara mekaniskt efter givna formler (Kvale, 1997)? Genom att samtala med en annan person kan man dela med sig av erfarenheter och uppfattningar. Man kan lära sig väldigt mycket på att lyssna på vad andra människor har att säga. Ett sådant utbyte är viktigt för att lärandet ska gå framåt (Säljö, 2000). Jag har valt metoden intervju, då jag valt att göra en kvalitativ undersökning. *Tekniskt sett är den kvalitativa forskningsintervjun halvstrukturerad, det vill säga varken ett öppet samtal eller ett strängt strukturerat frågeformulär* (Kvale, 1997 s. 32).

3.4 Forskningsetik

I dag genomför många vetenskapliga undersökningar i vårt samhälle. För att inte skada någon enskild individ eller en grupp människor finns det en del etiska regler man skall följa. Att inte redovisa enskilda namn på personer som deltar, eller på skolan där undersökningen genomförs skyddar man dessa individer. Allt deltagande är frivillig och de enskilda personerna är informerade om att materialet endast kommer att läsas av författaren och att det kommer att förstöras efter det att rapporten är klar. Studien är också godkänd av rektorn på skolan där undersökningen genomfördes. Då eleverna är över femton år, har ett godkännande från dem varit tillräckligt för att kunna genomföra studien (Allver m fl, 1998).

3.5 Intervju: genomförande och bearbetning

Jag har suttit med eleverna som deltagit i undersökningen i ett avskilt rum. Intervjuerna har genomförts med eleverna en och en. Eleverna som deltagit i undersökningen har fått en stencil med uppgifterna på. Eleverna har sedan löst uppgifterna medan de berättat hur de går tillväga och varför. Då eleverna inte förklarat tillräckligt tydligt hur de gått tillväga har kompletterande frågor ställts. Eleverna har inte fått uppgifterna förrän intervjun startat så de har inte tittat på dem i förväg, med undantag för de två uppgifterna som var med på provet för avsnittet.

Syftet med den kvalitativa undersökningen är att försöka gå djupare och förstå hur eleverna tänker. För att på ett bra sätt kunna utvärdera materialet efter intervjuerna har jag enligt Kvale (1997) använt mig av bandupptagning. Materialet har sedan bearbetats och analyserats på ett sådant sätt att man har kunnat se likheter och skillnader mellan elevernas sätt att lösa de olika uppgifterna på. Materialet som är inspelat på band har skrivits ut på papper för att underlätta bearbetningen av det insamlade datamaterialet. Texten har bearbetats och strukturerats för att kunna ge en överblick av materialet (Patel & Davidsson, 2003). Tyvärr innehåller inte inspelningen de visuella aspekterna men man har ändå mycket man kan arbeta vidare med (Kvale, 1997).

4. Resultat

För att läsaren lättare ska få ett sammanhang har jag valt att presentera resultaten och analysen uppgift för uppgift. För att se om eleverna gör samma eller olika fel jämförs elevernas lösningar. Analysen sammanfattas sedan utifrån de typer av fel som är vanliga och slutligen görs en jämförelse mellan de olika uppgifterna.

4.1 Första uppgiften

Den första uppgiften (se bilaga II) är en ekvation som redan är uppdelad i faktorer. Här kan man på ett mycket enkelt sätt se lösningarna till ekvationen, men man kan också välja att först förenkla ekvationen för att sedan lösa den med kvadratrotsformeln.

I denna uppgift var det endast en elev som började med att multiplicera in fyran i parentesen, istället för att först multiplicera ihop parenteserna. Han var dock medveten om att han inte skulle multiplicera in fyran i båda parenteserna utan gjorde det bara i den första. Tyvärr missade han att multiplicera den med båda termerna i den första parentesen, utan multiplicerade den bara med den första. Av de andra fem valde fyra att använda sig av konjugatregeln för att multiplicera ihop parenteserna. Dock var det endast en elev som nämner regeln vid namn. De andra använde regeln utan att kommentera den. En elev valde istället att multiplicera ihop parenteserna med så kallad parentesmultiplikation och fick då fyra termer i den nya parentesen, istället för två som konjugatregeln ger.

Eleven som valde att multiplicera in fyran direkt, fick en andragradsekvation med x^2-term, x-term och konstantterm, och valde därför att lösa den med hjälp av kvadratrotsformeln. Innan han gjorde det valde han att göra om sina bråktal till decimaltal.

Av de fem eleverna som valt att multiplicera ihop parenteserna först, valde samtliga att multiplicera in fyran när parentesmultiplikationen är klar. Fyra av eleverna fick följande: $16x^2 - 4 = 0$. En elev fick det istället så här: $16x^2 + 8x - 8x - 4 = 0$ först. Han har inte valt att förenkla tidigare, för att bli av med x-termen. Men det gör han nu och även han får ekvationen som de andra fem.

Fyra av fem elever valde nu att flytta över fyran till det högra ledet innan de dividerade båda termerna med sexton. En elev valde att först dividera med sexton innan han flyttade över konstanttermen till det högra ledet. Han valde sen att bryta ut x ur ekvationen, och kommer fram till en lösning som han själv konstaterade inte stämde och börjar självmant om där han gjorde fel första gången.

Tre av eleverna valde att göra om $\frac{4}{16}$ till 0,25 innan de drog roten ur på båda sidorna. En valde att fortsätta räkna med bråktal ända tills hon skulle skriva svaret, då gick hon över till decimaltal.

De tre elever som valde att göra om talet till decimaltal med en gång fick ut att: $x = \pm 0{,}5$. En elev valde att behålla bråktalen när hon drog roten ur, och fick följande: $x = \frac{2}{4}$, innan hon med ledning kom fram till att ekvationen ska ha två lösningar. Då insåg hon att hon glömt att ha både plus- och minustecknen framför konstanttermen när hon dragit roten ur.

En annan elev valde att inte dividera båda termerna med sexton innan han drog roten ur utan gör det direkt, vilket resulterar i att han fick fel lösning till ekvationen. Han fick det till: $8x = 2$. Alltså har han inte dragit roten ur $16x^2$, utan dragit roten ur x^2 men delat sexton med två. Han fick endast en lösning, men med ledning konstaterade han att den borde ha två lösningar. Han konstaterar även att han glömt plus minus när han dragit roten ur. Han ville dock inte gå tillbaka och räkna om det utan är nöjd så.

Fem av sex elever kommer fram till två lösningar på ekvationen, varav fyra stycken hade en korrekt lösning till slut.

Svårigheterna i uppgiften ligger i att kunna se lösningarna från början, eftersom uppgiften är faktoriserad. Om man väljer att förenkla uttrycket kommer man fram till en andragradsekvation som saknar x-term. För att göra det enkelt för sig när man förenklar uttrycket, kan man använda sig av konjugatregeln då parenteserna är likadana med ombytt tecken. Här ligger en svårighet, nämligen att kunna se att man kan lösa ut rötterna till ekvationen utan att behöva använda sig av kvadratrotsformeln. Om man inte ser det utan vill använda sig av kvadratrotsformeln, måste man först dividera båda termerna med 16, för att få x^2-termen ensam. När detta väl är gjort ligger en svårighet i att se att man får två lösningar när man drar roten ur ett tal med olika tecken men med samma storlek.

4.2 Andra uppgiften

Den andra uppgiften (se bilaga II) är en andragradsekvation, där man först måste dividera alla termerna med fyra för att få x^2-termen ensam. När man väl gjort det kan man använda sig av kvadratrotsformeln för att få ut de två lösningarna till ekvationen.

Samtliga elever valde att dividera alla termerna i ekvationen med fyra först. Detta för att få x^2-termen ensam. När de väl har gjort det ser ekvationen ut så här: $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$. En elev skriver upp det rätt men när han ska dividera med fyra dvs: $\frac{4x^2}{4} + \frac{4x}{4} + \frac{3}{4} = 0$, glömmer han att dividera tredje termen med fyra. Han räknade då med en ekvation som ser ut så här:

$x^2 + x + 3 = 0$. Det är en annan ekvation än den ursprungliga och den saknar lösning, vilket gör att han inte får ut de rätta lösningarna till uppgiften.

Alla eleverna använde sig av kvadratrotsformeln för att hitta lösningarna till ekvationen. Det är ingen av eleverna som använde namnet ”kvadratrotsformeln” eller ”andragradsformeln”, utan oftast heter den ”*den formeln som vi har lärt oss*” eller ”*pq-formeln*”.

När en av eleverna skulle ställa upp formeln, fick han först problem med att ta hälften av antalet x dividerat med två i formeln. Istället skriver han $\frac{x}{2}$, men ändrade sig innan han ska börja räkna uppgiften.

En elev glömde att byta tecken på första termen. Den blev positiv istället för negativ, men han såg det själv och rättade till det.

När eleverna kommit så långt att de skrivit in alla siffrorna i formeln, räknade samtliga först ut det som står under rottecknet. Någon såg direkt vad det blir, men de flesta räknade fram det. Hälften av eleverna ville använda miniräknare för att kunna räkna fram svaret.

En elev glömde här att han hade ett minustecken framför första termen, och fick därför svaret till: $x_1 = 1{,}5$ och $x_2 = -0{,}5$.

En annan elev glömde skriva ut minustecknet framför x_2 i svaret och fick det därför till: $x_1 = 0{,}5$ och $x_2 = 1{,}5$. x_2 blir positivt istället för negativt.

Eleven som gjorde fel i början och fick en helt annan ekvation. Han räknade i decimaltal på miniräknaren nästan direkt. De andra eleverna räknade hela vägen i bråkform, men de skrev ut svaret i decimalform.

Tre elever räknade helt korrekt och fick fram det rätta svaret på uppgiften.

På denna uppgift är första svårigheten att se att man måste dividera alla tre termerna med fyra för att få x^2-termen ensam och därmed kunna använda sig av kvadratrotsformeln. När eleverna ska räkna ut rötterna med formeln, glömmer de ibland byta tecken framför första och sista termen, vilket gör att svaret inte blir korrekt. Vanligt är att man inte tar med sig alla tecken när man flyttar ner siffrorna ett steg vid uträkningen. Att glömma kvadrera första termen under rottecknet är också ett vanligt fel. En del skriver det rätt först, men glömmer sedan att genomföra kvadreringen, utan de flyttar bara ner siffrorna till nästa led.

4.3 Tredje uppgiften

Tredje uppgiften (se bilaga II) är en andragradsekvation där man måste multiplicera alla termerna med sju, för att få x^2-termen ensam. Därefter kan man sätta in ekvationen i kvadratrotsformeln och få ut de båda lösningarna till ekvationen.

Två elever började med att konstatera att de inte vet hur de ska göra. Efter lite ledning förstod båda två hur de ska angripa uppgiften.

De resterande fyra eleverna såg direkt hur de ska gå tillväga för att lösa uppgiften. Samtliga multiplicerade alla termerna i ekvationen med sju, för att få x^2-termen ensam. De uttrycker sig lite olika över vad de gör. En elev uttrycker sig så här: *”Här har jag gångat upp sjuan.”*

Fem av de sex eleverna som var med i undersökningen får då ekvationen att se ut så här: $x^2 + x - 42 = 0$ efter att de multiplicerat alla termerna med sju.

En elev frågade om hon även skulle multiplicera nollan på andra sidan likhetstecknet med sju. Jag svarade att alla termerna skulle multipliceras med sju. När hon hade multiplicerat alla termerna med sju, fick hon denna ekvationen: $x^2 + x - 42 = 7$. Hon hade i det högra ledet fått att $7 \times 0 = 7$, vilket inte är korrekt. För att kunna lösa ekvationen satte hon in ekvationen i kvadratrotsformeln och hon flyttade över sjuan till vänsterledet. Då blev det så här: $x^2 + x - 49 = 0$. När hon satte in det i formeln och räknade ut rötterna, konstaterade hon själv att svaren blir med många decimaler. Hon började själv leta efter fel, som hon kan ha gjort tidigare i uppgiften. Hon hittade sitt fel och korrigerade det, sedan hon fram till de korrekta svaren.

En elev ställde upp lösningen till ekvationen rätt med hjälp av kvadratrotsformeln. Men han bytte sedan tecken på första termen så den blev positiv istället för negativ, vilket gör att svaren blir felaktiga.

Samtliga sex elever gick vidare genom att sätta in sina ekvationer i kvadratrotsformeln. För att kunna räkna ut summan under rottecknet använde fyra av de sex eleverna sig av miniräknaren. Samtliga elever använde miniräknaren för att dra roten ur.

Fyra av sex elever kom fram till rätt svar direkt, ytterligare en efter att själv ha korrigerat sig. Samtliga får två lösningar till ekvationen.

Första svårigheten på uppgift tre är att se att till skillnad från uppgiften ovan måste man här multiplicera alla termerna med sju, för att få x^2-termen ensam och sedan kunna räkna ut rötterna med hjälp av kvadratrotsformeln. Resten av svårigheterna är samma som i uppgiften ovan, förutom en. Det felet hade jag inte själv tänkt på i förväg. Det var att när en elev multiplicerar alla termerna med sju även multiplicerar nollan med sju och får det då till sju. Det var ett slarvfel som jag inte förutsåg.

4.4 Fjärde uppgiften

Den fjärde uppgiften (se bilaga II) är en andragradsekvation som saknar en konstantterm. Här kan man på ett enkelt sätt se lösningarna till ekvationen genom faktorisering.

Här konstaterade en elev direkt att x måste vara noll, bara genom att titta på uppgiften. Han valde sen att bryta ut x, för att hitta den andra lösningen och för att kunna visa att $x = 0$ är en lösning till ekvationen.

Fyra stycken valde att först faktorisera ekvationen. En elev valde att använda sig av kvadratrotsformeln, men såg när vi frågar om hon kunnat lösa uppgiften på något annat sätt även att hon hade kunnat faktorisera ekvationen.

Samtliga elever klarade uppgiften. Alla kunde förklara varför de faktoriserat och varför det blir två nollställen.

I uppgift fyra ligger svårigheten i att se att man kan faktorisera då båda termerna innehåller x, och konstantterm saknas. Har man väl sett det gäller det att se att det är två faktorer som ska multipliceras med varandra och att de ska bli noll. Alltså måste en av faktorerna vara noll, då inget annat än noll som en faktor ger produkten noll. Alltså bör man se att man får två nya ekvationer av första graden att lösa. En elev valde istället att använda sig av kvadratrotsformeln för att lösa uppgiften och även så kommer man fram till de rätta svaren, men det är en mer arbetsam väg att gå. Väljer man kvadratrotsformeln, är svårigheterna de samma som i de två uppgifterna ovan, förutom att man inte har någon konstantterm här och därför kan dra roten ur första termen direkt utan att ta hänsyn till q, eftersom det är noll.

4.5 Femte uppgiften

På den femte uppgiften (se bilaga II) får man en andragradsekvation där konstanttermen inte är ett givet tal, utan talet a. Uppgiften går ut på att ta reda på vad a ska vara för att ekvationen ska ha en dubbelrot. För att lösa uppgiften kan man sätta in den direkt i kvadratrotsformeln, då ser man att a måste vara 25 för att det ska bli en dubbelrot. Termerna under rottecknet ska bli noll.

När eleverna skulle lösa uppgiften, visste tre av eleverna inte vad en dubbelrot är. Jag valde då att berätta vad en dubbelrot är, för att se om de kan lösa uppgiften när de vet vad det är. Efter att jag har berättat för eleverna vad en dubbelrot är, var det ingen av de tre som vet hur de skulle lösa uppgiften. Jag valde att leda dem lite till, och de fick tipset att använda sig av kvadratrotsformeln. Nu ställde samtliga tre upp lösningarna enligt formeln. Två av dessa tre elever klarade nu på någorlunda egen hand att lösa uppgiften och se hur de ska gå tillväga för att x_1 och x_2 ska få samma värde. De kom fram till att a måste vara 25. De såg också att både x_1 och x_2 blir fem.

De andra tre eleverna visste vad en dubbelrot är och de ställde upp det med kvadratrotsformeln direkt. De ställde upp ekvationen så här: $x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - a}$. Alla tre förenklade sedan bråktalen, så att det istället kom att stå: $x = 5 \pm \sqrt{25 - a}$. Nu konstaterade samtliga att lösningen till ekvationen måste vara fem, och då måste det som står under rottecknet ta ut varandra. De ställde upp det så här: $25 - a = 0$, och konstaterade att om det ska bli noll måste a vara lika med 25.

I sista uppgiften, som medvetet är en mycket svår uppgift för elever i Matematik kurs B, är där många svårigheter och fällor. Den första är att veta vad en dubbelrot är för något, och då koppla det till bilden av en andragradgradskurva för att se framför sig hur den ser ut när det är en dubblerot. En dubbelrot har som bekant bara ett nollställe, vilket innebär att man måste klura ut vad som händer när man räknar ut en sådan ekvation med hjälp av kvadratrotsformeln. Förutom x finns här ytterligare en obekant det vill säga a. Som bekant har elever svårt för att räkna med bokstäver, utan de ”stänger lätt av” hjärnkontoret då de ser dem.

När man väl kommit så här långt gäller det att se att det under rottecknet måste bli noll, för att man bara ska få ett värde på x. Det vill säga man får plus minus roten ur noll. Så här långt ligger svårigheten i att se att $25 - a = 0$. Här konstaterar man att a ska vara 25 för att det ska bli noll. En tanke innan intervjuerna var att någon av eleverna skulle få a till –25 istället för 25, men i den fällan gick ingen av de sex eleverna.

4.6 Bråk

Att räkna med bråk, är något som är svårt för alla eleverna i denna undersökning. De väljer hellre att göra om det till decimaltal. Ibland blir det automatiskt så, eftersom de räknar mycket på miniräknaren och den ger svaret i decimaler om man inte ”ber den” om att få svaret i bråkform.

4.7 Teckenfel

Något annat som är vanligt är teckenfel. Man glömmer att byta tecken framför siffrorna i kvadratrotsformeln. Många gör dessutom så att de börjar med rätt tecken när de ställer upp uppgiften, men glömmer sen det i nästa led. Några elever glömmer att ha både plus och minus framför talet när de dragit roten ur, vilket resulterar i att ekvationen bara får en lösning.

4.8 Formler

Eleverna blir låsta vid att använda sig av formeln, som de lärt sig. De tittar inte först på uppgiften och försöker se olika lösningar utan de går direkt på formeln. Många av eleverna glömmer bort att tänka efter hur de på ett logiskt sätt skulle kunna lösa uppgifterna. De har lärt sig metoder och de använder de sig av flitigt.

Eleverna är duktiga på att lära sig formler och att följa dem. De kan oftast inte namnen på dem, men de vet hur de ska använda dem. Fyra av de sex eleverna valde att använda sig av konjugatregeln på första uppgiften, utan att nämna den vid namn. Samtliga elever använde sig av kvadratrotsformeln, men få nämnde den vid namn. Några kallade den för pq formeln, vilket den oftast kallas i talspråk, men ingen kallade den för kvadratrotsformeln.

4.9 Jämförelse mellan uppgifterna

Uppgift ett, är en uppgift som redan är faktoruppdelad. Trots att alla eleverna faktoriserade uppgift fyra och då kunde se lösningarna till ekvationen, var det ingen som kunde se lösningarna till ekvationen på uppgift ett. Samtliga elever valde att förenkla ekvationen innan de räknar sig fram till lösningarna. Lösningarna till uppgift ett kan man få ut på samma sätt som i uppgift fyra. En av parenteserna måste vara noll. Så antingen måste $(2x-1)=0$, eller så måste $(2x+1)=0$. Så här enkelt skulle man kunna få fram lösningarna till ekvationen. Intressant att se att alla sex eleverna kunde se att man kan lösa uppgift fyra med hjälp av faktorisering och att man då kunde se de olika lösningarna. Medan ingen kunde se att man har det faktoriserat och klart uppgift ett, och på ett mycket enkelt sätt hade kunnat få fram lösningarna till ekvationen.

I uppgift två, visste alla hur de ska gå tillväga för att lösa ekvationen. Alla vet att de ska dividera alla termerna med fyra. Tittar man sen på uppgift tre, som egentligen är av samma typ, är det en del som inte visste vad de ska göra. De som visste att de ska multiplicera alla termerna med sju är väldigt osäkra på vad de skulle göra.

I uppgift fem är det många som inte vet vad en dubbelrot är. När de väl har fått förklaringen kunde en del av eleverna komma fram till hur de ska lösa uppgiften. Några av eleverna kom ihåg vad en dubbelrot är, och kan därför lösa den direkt.

Två av eleverna som deltog i undersökningen har diskuterat med den ordinarie läraren om att få läsa kursen under längre tid. Det tycker inte att de hinner med, och vill ha mer tid på sig för kursen. Det är inga problem för de elever som läser samhällsvetenskapsprogrammet, eftersom de bara ska läsa en matematikkurs till, nämligen Matematik C (de kan också välja bort den). Men för de elever som läser teknik- och naturvetenskapsprogrammet är det svårare, då de under sin tid på gymnasiet även ska hinna med kursen Matematik D och eventuellt Matematik E.

5. Diskussion

Här presenteras och diskuteras de olika svårigheterna som finns när gymnasieelever löser andragradsekvationer. Vilka är svårigheterna och varför har gymnasieeleverna svårt för att lösa andragradsekvationer?

5.1 Bråk

Vid intervjuerna med eleverna i studien kommer det fram att de tycker det är svårt att räkna med tal i bråkform och att de hellre gör om talen till decimalform för att det är lättare. Samtliga elever i min studie har väldigt svårt för att räkna med bråk och undviker därför att göra det. Istället väljer de att använda miniräknaren vid uträkningar. Det menar Löwing och Kilborn (2003) till stor del beror på att de är vana vid att använda miniräknaren och att den alltid gör om bråk till decimalform. Min åsikt är att miniräknaren, eller grafräknaren som dessa elever använder sig av, används för mycket. De behöver ägna sig lite åt huvudräkning också. Om inte annat så för att kunna göra en överslagsräkning för att se om de svar de kommer fram till är rimliga eller inte. Anghileri (2000) menar att elever idag har mycket svårt för tal som är delar av hela tal överlag, och behöver därför öva sig mer i bråkräkning utan miniräknare för att kunna räkna med bråktal. Det är vanligt idag att man använder sig av miniräknare även på de lägre stadierna i matematikundervisningen. Det gör att eleverna aldrig riktigt konfronteras med bråktal i huvudräkningssammanhang. Filloy och Sutherland (1996) menar att det är svårt att motivera elever till att räkna utan miniräknare när alla har tillgång till dem. Det tycker jag är lärarnas uppgift att kunna motivera. Att man använder miniräknare för att kontrollera att man gjort rätt eller för att se hur en graf ser ut är inte fel, men att alltid använda miniräknare för enkel huvudräkning anser jag inte att det finns någon anledning till. Använder man sig alltid av miniräknaren när man räknar med negativa tal, blir det svårt att hålla reda på tecknen när man ska räkna med kvadratrotsformlen utan miniräknare.

5.2 Teckenfel

En del av eleverna i studien ställer upp uppgifterna rätt med rätt tecken och allt, men en del tecken och siffror ”försvinner” på vägen. Många av dem är stressade och slarvar därför, vilket resulterar i att allt inte följer med till nästa led. Det ger ofta stora fel i svaret vid ekvationslösning.

Vanligt bland eleverna i studien är att de glömmer sätta både plus- och minustecken framför siffrorna när de ska dra roten ur ett tal, vilket gör att en av lösningarna till andragradsekvationen ”försvinner”. De har lärt sig att en andragradsekvation kan sakna lösning (dvs inte ha en reell lösning), ha en lösning eller två lösningar, därför reflekterar de inte över att de bara får en lösning.

Vad är egentligen ett negativt tal? Hur räknar man med det? Många av eleverna har under lektioner uttryckt att lika tecken ger plus, och olika tecken minus. Vilket är en bra regel för att man ska veta hur man ska gå tillväga, men den gör inte att man förstår varför det blir så.

Anledningen till att eleverna i studien gör teckenfel beror dels på bristande kunskaper om negativa tal och minustecknets betydelse, men också till stor del på slarv och stress. Negativa tal är en mycket viktig del av matematiken som man måste förstå och om man ska gå vidare och läsa matematik på en högre nivå. Det är också viktigt att man försöker uppmärksamma dem för eleverna så att de inte ”slarvas bort”. Det ska många av eleverna som deltog i studien, då det ingår mer matematik i deras program.

5.3 Formler

Eleverna i studien tycker att det är svårt att hantera regler och formler, det blir så abstrakt för dem. Kvadratrotsformeln innehåller många svårigheter, och det finns många ställen att göra fel på.

En formel består av variabler som betecknas med bokstäver. Bergsten, Häggström & Lindberg (1997), skriver att elever har svårt att förstå innebörden av vad dessa symbolerna står för. De måste helt enkelt förstå vad symbolerna innebär, för att se en formel som användbar. Eleverna studien var duktiga på att använda kvadratrotsformeln, men några av dem hade svårt för att förstå varför det skulle vara plus eller minus framför första och sista termen..

För att själva kunna ställa upp ekvationer måste eleverna ha en förståelse för symbolerna och själv kunna ge dem en innebörd som Bergsten, Häggström & Lindbergs (1997) skriver. Olteanu (2000) menar ju att elever inte har några problem med att räkna med symboler, utan att det ligger i brister i förståelsen. Studien visade att många av eleverna kan använda formeln för att lösa ut sina variabler, men de saknar bakomliggande förståelse för varför man kan använda den och varför den ser ut som den gör.

Att en så stor del som fem elever av sex i studien använder sig av konjugatregeln för att multiplicera ihop parenteserna i uppgift ett är imponerande. I det fallet är det en regel som förenklar uträkningen. Här har eleverna också lärt sig att använda en formel, och de klarar att byta ut symbolerna i formeln mot siffrorna i ekvationen. Svårigheterna bör bli större när eleverna själva ska ställa upp ekvationerna utifrån ett problem. Men det har inte studerats i denna studie.

Den femte uppgiften tycker många av eleverna i studien är svår, men det är intressant att alla klarar den med lite hjälp. Få av eleverna i studien kommer ihåg vad en dubbelrot är från tidigare undervisning. Det är viktigt att de även ser kopplingen mellan ekvationen och dess funktion. Unenge (1994) menar att det är viktigt att man ser likheterna och skillnaderna mellan ekvationer och funktioner för att förstå ekvationslösning. De måste också veta att lösningen till ekvationen är just där funktionen har sina nollställen, dvs där y är noll och kurvan skär x-axeln. Det är något som man måste trycka mycket på i undervisningen och hela tiden tydliggöra för eleverna. Eleverna i studien lyckades väldigt bra med att se vilka specifika egenskaper en ekvation måste ha för att den ska ha en dubbelrot. I uppgiften behövde eleverna mer ledning än tidigare, men samtliga elever förstod relativt fort hur de skulle gå tillväga för att lösa uppgiften. Dubbelrot blir som ett nytt begrepp för eleverna och de känner sig osäkra. Därför vill de ha ledning för att kontrollera att de är på rätt spår.

Anledningen till att det är så svårt för eleverna att använda sig av formler vid ekvationslösning av andra graden, beror nog till stor del på att det är första gången som eleverna konfronteras med en lite svårare formel som de ska använda. De formler som de räknat med tidigare har varit mycket enklare. Kanske ska man tidigt i skolmatematiken införa enklare formler så att det inte blir något som eleverna är ”rädda” för.

5.4 Jämförelse mellan uppgifterna

Uppgift nummer två känner samtliga elever i studien igen typen av, och alla vet hur de ska angripa den, men de kan inte se att uppgift tre är av samma typ som uppgift två. Uppgift tre uppfattas som mycket svårare av eleverna i studien. Samtliga elever kunde lösa uppgiften med lite ledning.

Som jag konstaterade i resultatdelen så finns det likheter mellan uppgift ett och fyra. Tyvärr var det ingen av eleverna i studien som såg likheterna. Det kan bero på att ekvationen är lik uppgifter som de tidigare har förenklat. Den enda skillnaden är att uttrycket var lika med noll, vilket gör att det i det här fallet inte bara är ett uttryck utan en ekvation. Persson (2005) menar att elever i allmänhet gärna gör uttryck till ekvationer och får ett värde på x, trots att de bara ska förenkla ett uttryck. Här gör eleverna i studien tvärtom, de har en ekvation men istället för att först se hur de på enklaste sätt kan få fram värdena på x, väljer de att förenkla uttrycket och multiplicera ihop parenteserna. Många av eleverna angriper nog uppgifterna genom att först göra vad de kan, när de inte vet riktigt hur de ska lösa en uppgift, och hoppas sen att de ska kunna se hur de ska göra. En annan förklaring kan vara att de har lärt sig att de kan använda sig av faktorisering för att lösa andragradsekvationer när det saknas en konstantterm, vilket det också gör i denna uppgift, men det ser de inte förrän de har förenklat ekvationen. Så när de väl kommer fram till ett uttryck med två termer, det vill säga en x-term och en x^2-term, blir de väldigt osäkra på hur de ska fortsätta. Då ekvationen består av två termer istället för tre, tycker de att det är svårt att sätta in den i kvadratrotsformeln. Här ville eleverna gärna prata om uppgiften och hur de skulle gå vidare med den. De flesta kom på hur de skulle gå vidare på egen hand, men de ville ha en bekräftelse på att de var på rätt väg.

5.5 Tid

I samband med olika verksamhetsförlagda utbildning har lärarna uttryckt att man har väldigt ont om tid till matematikkurserna på gymnasiet idag och därför inte anser sig ha utrymme för så mycket grupparbete och laborerande undervisning. Det blir istället mycket traditionell katederundervisning. Förmodligen hade fler elever kunnat förstå matematiken i skolan, om det hade funnits mer tid för den. Elever behöver också öva mycket hemma för att få en förståelse och att själva se samband mellan olika typer av uppgifter. Både Olteanu (2000) och Persson (2005) menar att eleverna behöver mer tid för att få en god förståelse av algebran i skolan. Några av eleverna i studien kommenterar också att de vill ha mer tid på sig för de känner att de inte hinner med. Enligt kursplanen ska skolans undervisning utveckla elevernas självförtroende inom matematiken. De ska tänka matematisk och använda sig av matematiken för att lösa problem i olika situationer (Skolverket, 2005). Eleverna måste redan i de tidiga skolåren böja *ta sin del av ansvaret* för sin utbildning och ha en *vilja* att lära sig. Alla lär vi oss något hela tiden, men att ta aktiv del av sitt eget lärande är en viktig bit. Marton och Booth (2000) menar att lärande pågår hela livet och inte bara innanför skolans väggar.

Att elever i allmänhet har en god förförståelse av aritmetiken är A och O för att de ska kunna få en god förståelse för algebran och andragradsekvationen. Persson (2005) menar att det är lärarens uppgift att ta reda på vad eleverna kan för att kunna bygga vidare på deras kunskaper, då de hela tiden relaterar sina nya erfarenheter till gamla kunskaper. Enligt Marton och Booth (2000) måste man koppla nya begrepp till sina tidigare erfarenheter för att få en god förståelse för nya kunskaper.

5.6 Förståelsen

Matematiken är ett ämne som man måste ha en god förståelse i. Det finns ingen mening med att lära sig allt utantill. Men man kan ändå prata om ytansats och djupansats även i denna studie. En del elever förstår och kan använda sin kunskap även i andra sammanhang, medan andra ser matematiken som en samling regler och kan inte använda sig av den i andra sammanhang. De eleverna får också problem när de ska börja ställa upp ekvationerna själv och inte bara lösa färdiga ekvationer utefter modeller som de lärt sig utantill.

Säljö (2000) menar att man lär sig genom samtal och samvaro med andra människor. Det tror jag är en viktig del av matematikämnet, även om det tyvärr inte är så vanligt att man ”pratar” matematik i skolan idag. De flesta av eleverna i studien kunde genom ledning lösa även den sista uppgiften trots att de inte hade alla begreppen klara för sig. De uttryckte också tydligt att de *ville* prata om uppgifterna. Några ville också ha en bekräftelse på att de gjort rätt. Det är viktigt att samtala kring och om matematiken för att fler elever ska få en bättre förståelse för matematiken och klara kurserna. Vygotskij menar att man konstruerar sin kunskap och förståelse i samspel med andra människor (Granberg & Ohlsson, 2004).
Elevernas räknande i studien känns mekaniskt. De har lärt sig en metod och den följer de blint. Men flertalet av eleverna kan inte sin matematik så bra att de kan klara kluriga uppgifter på egen hand. Elever känner ofta i matematik idag, och framför allt i algebra, att det ska vara så regelstyrt. Man lär sig många regler och arbetar med dem mekaniskt utan att egentligen förstå vad de innebär. Förståelse är ett nyckelord i matematiken både vid tidigare skolår och på gymnasiet. Saknar man förståelsen så blir allt mycket svårare.

I undervisningen har mycket tid ägnats åt att diskutera härledningen av kvadratsrotsformeln med eleverna. De har även arbetat med kvadratkomplettering för att de ska kunna få en förståelse var formeln kommer ifrån.

Tydligt är att eleverna har lärt sig enkla faktoriseringar som i uppgift fyra och de kan se eller vet hur de ska ta reda på lösningarna. Men de har inte riktigt förstått vad det innebär att faktorisera, för i så fall hade de även klarat uppgift ett med denna metod.

Något man kan reagera på är att ingen av eleverna använder sig av prövning för att se om de har kommit fram till de rätta lösningarna till ekvationerna. Det kan bero på olika saker. Främst tror jag att det beror på att de vet att man inte får prova sig fram till lösningarna på en ekvation utan att man bara får använda sig av det för att pröva lösningen som man räknat fram. Det i sin tur kan bero på att man går igenom prövning men ganska sällan tillämpar den på lektionerna. Det kan också vara så att i den intervjusituationen påverkar eleverna. De fick information från början att jag bara var intresserad av hur de gick tillväga. Några av eleverna trodde nog att jag dessutom skulle upplysa dem om de räknat fel på någon uppgift, vilket jag inte gjorde förrän i efterhand.

5.7 Avslutande kommentarer

I studien har eleverna med egna ord beskrivit hur de har gått tillväga för att lösa uppgifterna. De var mycket duktiga på att beskriva vad de gjorde och varför. När någon inte förklarade så tydligt, ställde jag frågor som gjorde att de förtydligade sig. Naturligtvis hade man fått andra resultat om man hade valt sex stycken andra elever, men jag tror ändå att deras kunskaper och förståelse på ett bra sätt speglar gymnasieelever på de teoretiska programmen. Kanske att resultatet ligger närmre naturvetarna och teknikerna än samhällsvetarna. Vid en jämförelse med elever från ett praktiskt program som läser Matematik B hade det visat sig att eleverna i studien hade presterat mycket bättre än sex elever från det praktiska programmet. Studien hade varit mer tillförlitlig om jag valt att undersöka en större grupp. Att jag själv undervisat och planerat lektionerna med eleverna i studien gör att det jag tryckt på i avsnittet under lektionerna kanske också speglar frågorna i min studie. Det hade nog varit mer objektivt om någon utomstående hade gjort uppgifterna. En fördel med att jag både undervisat eleverna och sedan också intervjuar dem kan göra att de känner sig tryggare och mer avslappnade och därför presterar bättre än om det varit en för dem helt okänd som genomfört intervjuerna med dem.

Förmodligen hade inte alla elever klarat uppgift fem utan ledning. Då kan man tycka att resultatet på uppgiften inte speglar elevernas kunskaper, men ledningen bestod av frågor som de själva fick besvara och som ledde dem framåt i sina egna tankar. Ledningen har påverkat elevernas resultat men de har också lärt sig något av att få resonera sig fram till svaret.

Det finns många svårigheter för eleverna i studien när de ska lösa andragradsekvationer. Men det som är viktigast för att de ska lyckas, är att de har en god förståelse för och kunskap inom aritmetiken och att man ger dem mycket tid. Studien visar att man behöver samma kunskaper för att lyckas med andragradsekvationer, som Olteanu (2000) och Persson (2005) menar att man behöver inom algebran. Lär man sig inte grunderna i aritmetiken, finns bristerna även med vid ekvationslösning av andra graden. Eleverna i studien klarar uppgifterna där de bara ska använda kvadratrotsformeln för att ta reda på lösningarna till andragradsekvationerna, men när det blir lite mer komplicerade uppgifter som i uppgift fem fungerar det inte längre att lösa dem mekaniskt. Här måste man också förstå *varför* man använder formeln och hur den fungerar.

En annan slutsats av studien är att tiden är avgörande för hur mycket man kan och hur mycket man förstår. Både Olteanu (2000) och Persson (2005) menar att tiden är direkt avgörande för hur bra eleverna klarar att uppnå målen inom algebra. Undervisningen på området, i klassen innan studien, bestod till stor del av så kallad katederundervisning för att hinna med hela avsnittet. Deras studier visar på att elever överlag behöver mer tid på sig för att ta till sig matematiken. Är det då inte så att man måste göra någon förändring? Är det då meningen att man ska anpassa undervisningsmodellen efter tiden man har att tillgå, eller är det en möjlighet att utöka tiden man har till sitt förfogande i matematikundervisningen? Behöver alla som läser matematik kurs B kunna lösa andragradsekvationer? Om de inte kan sin algebra, hur ska de då kunna lära sig lösa andragradsekvationer?

För fortsatta studier kan man undersöka hur man undervisar i algebra på grundskolan och hur stora skillnaderna är på förståelsen och kunskaperna där. En annan studie skulle kunna vara hur de klarar att lösa problem med hjälp av andragradsekvationer, då kan man titta på elevernas förståelse av andragradsekvationer. Då skulle det vara intressant att först titta på hur de klarar uppgifter som liknar de som var med i denna studie, och sedan titta på den andra typen. På så sätt är det lättare att se om de har förståelse för andragradsekvationer, eller om de bara löser uppgifterna mekaniskt.

6. Sammanfattning

Det är svårt att hitta material där det har forskats om hur elever löser andragradsekvationer. Den huvudsakliga forskningen har utförts med syfte att se hur eleverna går tillväga när de räknar algebraiskt och då ofta ekvationer av enklare art. Syftet med min uppsats är att belysa problem som uppstår när gymnasieelever löser andragradsekvationer. Gör eleverna likartade fel? Har eleverna gemensamma brister inom matematiken som gör att de inte kan lösa andragradsekvationer, och i så fall vilka?

Studien genomfördes på en gymnasieskola under vårterminen 2005 i en grupp som bestod av elever från naturvetenskaps-, teknik- och samhällsvetenskapsprogrammet, åk 1. Studien utgår från intervjuer med sex elever í gruppen om hur de går tillväga när de löser ekvationer av andra graden. När studien genomfördes läste eleverna kursen Matematik B, och hade precis avslutat området om andragradsekvationer. Eleverna löste fem uppgifter medan de förklarade hur de gick tillväga. Samtalet eller intervjun spelades in på band. Banden och elevernas uträkningar har analyserats i sökandet efter gemensamma problem och brister vid ekvationslösning av andra graden.

Resultatet visar att eleverna har lyckats bra med att lösa de enklaste formerna av andragradsekvationer med hjälp av kvadratrotsformlen, men att de har brister i sina kunskaper som gör att de har svårare att lösa de som är lite mer komplicerade. Det visar sig också att eleverna gör samma fel. Så deras brister är likartade. Ett tydligt resultat är att några av eleverna inte behärskar negativa tal och att de har svårt att koppla ihop begreppen funktion och ekvation och se likheterna som man kan använda sig av för att lösa uppgift fem (se bilaga II). Eleverna som deltog i studien hade överlag svårt att räkna med bråk, vilket till stor del beror på att de använder sig av miniräknaren vid all form av räkning.

Studiens slutsatser visar på att elevernas tidigare erfarna kunskaper inom aritmetik och algebra, speglar deras förmåga att också lösa ekvationer av andra graden. Den visar också att eleverna behöver mer tid för att befästa gamla kunskaper i bråk och negativa tal för att de ska kunna förstå andragradsekvationen och dess lösningsformel.

Referenser

Anghileri, J. (2000): *Teaching Number Sense.* London: Continuum

Allver, B-G. Öyen, Ö. (1998): *Etik och praktik i forskarens vardag.* Lund: Studentlitteratur

Bergsten, C. Häggström, J. & Lindberg, L. (1997): *Algebra för alla. Nämnaren Tema*. Nämnaren, Göteborgs universitet.

Björk, L-E, Brolin, H. Munther, R. (1994): *Matematik 2000 komvux kurs B.* Falköping: Natur och Kultur

Björk, L-E. Brolin, H. Ekstig, K. (1996): *Matematik 2000 komvux kurs E.* Falköping: Natur och Kultur

Björk, L-E. Brolin, H. Ekstig, K. (1994): *Matematik 2000 komvux kurs A.* Falköping: Natur och Kultur

Björk, L-E. Brolin, H. (2002): *Matematik 3000 komvux kurs B.* Falköping: Natur och Kultur

Carlgren, I. Marton, F. (2000): *Lärande av imorgon.* Stockholm: Lärarförbundetsförlag

Dahl, K. (1991): *Den fantastiska matematiken.* Falkenberg: Fischer & Co

Ekblom m.fl. (2003): *Tabeller och formler för NV- och TE-programmen.* Stockholm: Liber

Filloy, E & Sutherland, R. (1996): Designing curricula for teaching and learning algebra. I A. Bishop et al (Eds.) International handbook of mathematics education. Dordrecht: Kluwer.

Granberg, O. Ohlsson, J. (2004): *Från lärandets loopar till lärandet organisationer.* Lund: Studentlitteratur

Hurwitz, M. (1990): *Writing restorer meaning to symbols*, Mathematics Teacher.

Häggström, O. (2005): Det är dags att göra upp räkningen. http://www.axess.se/svenska/arkiv/2004/nr4/aktuellt/tema_haggstrom.php [Hämtat 20050427]

Kvale, S. (1997): Den kvalitativa forskningsintervjun. Lund: Studentlitteratur

Löwing, M. Kilborn, W. (2003): *Huvudräkning-En inkörsport till matematiken.* Lund: Studentlitteratur

Marton, F. & Booth, S. (2000): *Om lärande.* Lund: Studentlitteratur

Nationalencyklopedin (2000): Nationalencykopedin. Malmö: Bra böcker

Olteanu, C. (2000): Varför är skolalgebran svår?, http://tsunami.hkr.se/files/tsunami2003202.pdf. [Hämtat 20050427]

Patel, R. Davidson, B. (2003): *Forskningsmetodikensgrunder- Att planera, genomföra och rapportera en undersökning.* Lund: Studentlitteratur

Persson, P-E. (2005): *Bokstavliga svårigheter-Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebratänkande*. http://epubl.ltu.se/1402-1757/2005/09/LTU-LIC-0509-SE.pdf [Hämtat 20050427].

Sandberg, J. Targama, A. (1998): *Ledning och förståelse- Ett kompetensperspektiv på organisationer.* Lund: Studentlitteratur

Skolverkets (2005): skolverkets hemsida, http://www3.skolverket.se, [Hämtad 2005-03-22]

Säljö, R. (2000): *Lärande i praktiken.* Stockholm: Prisma

Thompson, J. (1996): *Matematiken i historien.* Lund: Studentlitteratur

Unenge, J. Sandahl, A. Wyndhamn, J. (1994): *Lära matematik.* Lund: Studentlitteratur

Bilaga I

Definitioner

Aritmetik:

Ordet aritmetik kommer från grekiskan, och betyder räknekonst. I denna delen av matematiken ingår de fyra räknesätten (addition, subtraktion, multiplikation och division). Talteorin är en annan del av aritmetiken. Ofta när man talar om aritmetik i matematik idag, syftar man på talteoretiska aspekter på ett matematiskt problem (Nationalencyklopedin, 2000).

Bråk:

Bråk är ett matematiskt uttryck på formen $\frac{a}{b}$. Där a kallas för täljaren och b för nämnaren. Nämnaren får aldrig vara noll. Om täljaren är jämt delbar med nämnaren kan en division genomföras, med ett heltal som svar. Om $b = 1$ så blir divisionen a (Nationalencyklopedin, 2000).

Dubbelrot:

En dubbelrot är när en ekvation har två sammanfallande rötter. Det infaller när en ekvation är delbar med $(x - a)$, samtidigt som den är delbar med $(x - a)^2$. En andragradsekvation $ax^2 + bx + c = 0$, har en dubbelrot om och endast om $4ac - b^2 = 0$ (Nationalencyklopedin, 2000).

Funktioner:

Från latinet kommer ordet funktion och betyder fullgöra eller uträtta. En funktion beskriver sambandet mellan två (eller fler) variabler. Man brukar beteckna en funktion som y eller f(x). Man brukar säga att y är en funktion av x, det vill säga att värdet på y beror av x. I allmänhet kallar man x för den oberoende variabel och y för den beroende. Till varje värde på x finns det endast ett värde på y (Unenge m fl, 1994).

Förkortning och förlängning:

Förkortning är en benämning i matematiken som innebär en operation som förenklar tal och uttryck skrivna i bråkform och som innebär att nämnare och täljare divideras med samma tal.

Att istället multiplicera nämnare och täljare med samma tal kallas förlängning (Nationalencyklopedin, 2000).

Konjugatregeln:

Matematiskformel som säger att: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (Nationalencyklopedin, 2000).

Kvadreringsreglerna:

Matematiska formler inom algebran som säger att: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ och att: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (Ekbom m fl, 2003).

Kvadratrot:

Kvadratroten ur ett givet tal är ett tal vars kvadrat är det givna talet. Ett positivt tal a har en positiv och en negativ rot, som betecknas $\sqrt{a}$ respektive $-\sqrt{a}$. Men kvadratroten är den positiva roten dvs $\sqrt{a}$. Ett negativt tal har ingen reell kvadratrot (Björk, Brolin & Ekstig, 1994).

Kvadratrotsformeln:

Kvadratrotsformeln är en formel som man använder för att lösa andragradsekvationer. Den förenklar tillvägagångssättet mycket, jämfört med att alltid behöva kvadratkomplettera andragradsekvationer. Den säger att ekvationen: $x^2+px+q=0$, har lösningen: $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ (Matematik 2000 kurs B, 1994).

Rötter/lösningar:

Rötter, lösning, nollställe, kärt barn har många namn. En lösning till en ekvation när högerledet är noll, är där ekvationens graf skär x-axel. Det vill säga när $y=0$ (Matematik 2000, 1994).

Bilaga II

1. Lös ekvationen: $4(2x-1)(2x+1)=0$

2. Lös ekvationen $4x^2+4x-3=0$

3. Lös ekvationen $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{x}{7}-6=0$

4. Lös ekvationen $x^2-4x=0$

5. För vilket värde på a har ekvationen $x^2-10x+a=0$ en dubbelrot?