HÖGSKOLAN
KRISTIANSTAD

Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse V

Per-Eskil Persson & Tomas Wennström
Klippans Gymnasieskola 2001

Innehållsförteckning

Förord

Detta är den femte och avslutande rapporten från en longitudinell undersökning av de NV-elever, som höstterminen 1998 påbörjade sina gymnasiestudier vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten med studien har främst varit att undersöka hur elevernas algebraiska förmåga och förståelse utvecklas under gymnasietiden. Denna rapport beskriver situationen då eleverna lämnar gymnasieskolan efter tre års studier. Den ger också en sammanfattning av hela undersökningen.

Dessa studier har möjliggjorts dels genom ett generöst bidrag från Gudrun Malmers Stiftelse, dels genom anslag från Skolverket. Vi vill varmt tacka universitetslektor Barbro Grevholm, Högskolan Kristianstad för mycket hjälp, uppmuntran och konstruktiv kritik under arbetets gång. Undersökningen är en del i ett projekt i matematikdidaktik som i samarbete med Högskolan Kristianstad genomförts i Klippans kommun. Till sist ett stort tack till våra elever för att de tålmodigt hjälpt oss genomföra den här undersökningen. Utan deras insats hade det inte blivit något alls!

Bakgrund

Höstterminen 1998 startade vi en longitudinell undersökning av de elever, som då började i NV1 vid Klippans Gymnasieskola. Avsikten var att studera hur algebrakunskaperna utvecklas under gymnasietiden. Vi har nu följt dessa elever under tre år. Totalt har ca. 100 elever ingått i studien. Dessa avslutade sina gymnasiestudier i juni 2001. I denna femte och avslutande rapport kommer vi att redogöra för läget då eleverna lämnar gymnasieskolan. Vi kommer också att ge en sammanfattning av hela undersökningen och de slutsatser man kan dra från vårt material.

Undersökningen inspirerades framförallt av den häftiga debatt om studenternas dåliga förkunskaper i matematik, som utbröt hösten 1997 (se t.ex. Johansson, 1998 och Högskoleverket, 1999). Vi har också velat anknyta till dels en pågående undersökning av lärarkandidater med inriktning mot matematik och naturvetenskap för årskurs 4 - 9 vid Högskolan i Kristianstad (Grevholm, 1998), dels en studie Morten Blomhöj gjort med danska niondeklassare (Blomhöj, 1997). Båda dessa undersökningar försöker kartlägga och analysera begreppsförståelsen hos elever - något vi också försökt göra i våra studier.

Undersökningen har varit en del av ett matematikdidaktiskt utvecklingsprojekt i nordvästra Skåne som Högskolan Kristianstad och Klippans kommun genomfört tillsammans (se Grevholm & Wennström, 1998, 1999).

Det är väl dokumenterat både nationellt och internationellt att det finns problem med bristfälliga kunskaper i algebra. Många elever har stora svårigheter med att lära sig algebra och resultatet av undervisningen är ofta nedslående.

> *Many studies have shown the difficulties of students at several school levels with respect to the concepts focused on in the various ways of introducing algebra: equation solving, the manipulation of algebraic expressions, problem solving and the handling of fundamental concepts such as that of variable.* (Bednarz, 1996, sid. 3)

> *Många elever ser algebran som svårtillgänglig. Om man inte lyckas kan man tappa intresset och få en negativ inställning till hela matematikämnet.*
> (Bergsten et al, 1997, sid. 152)

> *However, to cover their lack of understanding, it appears that students resort to memorising rules and procedures and they eventually come to believe that this activity represents the essence of algebra.* (Kieran, 1989, sid.390*)*

Mycket forskning om algebrainlärningen har också gjorts från olika infallsvinklar, men man måste nog tyvärr konstatera, att ingen har funnit någon kungsväg till algebran. En hel del resultat av intresse för praktikern finns, men det kommer säkert att ta lång tid att i grunden förstå hur algebrainlärning sker (se t.ex. Bergsten et al, 1997, Wagner & Kieran, 1989 och Bednarz et al, 1996). Freudenthals påstående i citatet nedan är lika sant i dag – 2001 – som det var 1973.

> *Despite all the results in elementary algebra, there seems to be a long way to a testable theory in this field. Freudenthal pointed out in 1973 that it will take a long time for us to understand thoroughly how children learn algebra. This statement is still valid today.*
> (Ekenstam & Greger, 1987, sid.314)

Å andra sidan är det ett välkänt faktum att goda kunskaper i algebra är väsentliga – är ett ”kritiskt filter” - för hur man lyckas med studier i matematik, fysik, teknik osv. De flesta misslyckanden i dessa ämnen på gymnasie- och universitetsnivå beror troligtvis ofta på bristande algebraisk förmåga. Faktum är att en individ med bristfälliga kunskaper i algebra utestängs från en mängd yrkeskarriärer.

> *Elementary algebra is a threshold to be crossed for successful further studies in mathematics. But also studies in other subjects physics, technology etc. depend heavily on skill in handling algebraic expressions.* (Ekenstam & Greger, 1987, sid.313)

Därför är det av stort intresse att undersöka vilka algebrakunskaper eleverna har med sig från grundskolan och hur de kan utveckla och förbättra dessa kunskaper under gymnasietiden.

Området för vår studie är den traditionella skolalgebran dvs. bl. a. ekvationer av första och andra graden, enkla ekvationssystem, förenklingar av polynom och rationella uttryck, enkla funktioner och deras grafer (jfr. Kieran, 1992, sid. 391). Vi anser att hela den algebraiska cykeln med faserna *översättning*, *omskrivning* och *tolkning* är lika viktig (se Bergsten et al, 1997, sid. 15-16). Med ny teknik som t.ex. symbolhanterande räknare kommer kanske översättning och tolkning att bli viktigare än omskrivning. Symbolhanterande räknare och datorer kan skriva om algebraiska uttryck, men de kan inte översätta och tolka dem. Trots ny teknik är ett visst mått av manuella färdigheter troligtvis nödvändiga. Vi vet t.ex. inte hur färdighetsträning och förståelse hänger ihop.

> *In other words, it is not obvious how the use of symbol manipulators in the early stages of learning algebra can help students develop a structural conception of algebraic expressions. This is a question for future research.* (Kieran, 1992, sid.414)

> *The availability of symbol manipulators on relatively cheap calculators is also causing requestioning of the purpose of school algebra. Perhaps our awareness of what aspects of 'algebra' a computer can do will help us to understand what aspects of 'algebra' a computer cannot perform. We may come to realise that effective symbol manipulation as a part of mathematical problem solving has always been more than the mechanistic manipulation which it has often been criticised as being.* (Filloy, 1996, sid. 157)

Undersökningen har hittills presenterats i fyra rapporter (Persson & Wennström, 1999, 2000a, 2000b, 2000c). Den första av dessa beskriver läget då eleverna började gymnasieskolan i augusti 1998. Rapport två beskriver läget ett år senare och vilka förändringar som inträffade under första året i gymnasieskolan. Den tredje rapporten är en detaljerad studie av 10 elevers utveckling under första året. I den fjärde rapporten diskuteras vilka algebrakunskaper, som är stabila, och hur eleverna lyckats med sina matematikstudier i gymnasieskolan. Intresserade läsare hänvisas till dessa rapporter för detaljer.

Problem och frågeställningar

När man genomför en undersökning av det här slaget, påverkas naturligtvis de frågor man ställer och hur man tolkar dem av ens erfarenhetsbakgrund. En akademisk forskare och en lärare har säkert olika utgångspunkter. En orsak till detta är att läraren inte enbart är observatör utan också deltagare i en inlärningsprocess. Det är viktigt att man är någorlunda klar över vilket ens perspektiv är. Vårt är praktikerns – läraren i klassrummet. Därför är vårt huvudintresse hur vi kan förbättra våra elevers algebrainlärning och vår undervisning.

I en undersökning, som sträcker sig över flera år, kan de ursprungliga frågeställningarna behöva ändras. Man kan bli varse att en fråga är olämpligt eller felaktigt ställd. Ett exempel på detta är den fråga vi ställde i vår första rapport om det finns en minsta nivå på förkunskaperna från grundskolan för att en elev skall lyckas med sina matematikstudier i gymnasieskolan. Med lyckas menar vi i detta sammanhang att minst uppnå ett klart godkänt resultat på de olika matematikkurserna, som finns på NV-programmet. Ganska snart insåg vi att frågan inte går att besvara. Hur man lyckas är ett komplicerat samspel av både kognitiva och affektiva faktorer. Frågan borde kanske i stället vara om man kan klara NV-programmet med relativt dåliga förkunskaper och vad skolan och eleven kan göra i det sammanhanget för att underlätta för eleven. Finns det faktorer, som är av speciell betydelse för att elever med dåliga förkunskaper skall lyckas?

En annan fråga av intresse är vilka förkunskaper som är speciellt viktiga för algebrainlärningen. Det är kanske inte så att eleverna när de kommer från grundskolan behöver vara speciellt duktiga på att skriva om algebraiska uttryck. Det är kanske andra kunskaper och färdigheter som är av större vikt som t.ex. god talförståelse - även av negativa och rationella tal, prioriteringsregler och parentesers betydelse, förståelse för vad bokstäver står för och förmåga att översätta till ett algebraiskt uttryck samt likhetstecknets betydelse.

Den väsentliga frågan är naturligtvis hur vi - utgående från varje elevs individuella förutsättningar - kan ge en god algebraisk kompetens. Att en sådan behövs om man skall lyckas med sina matematikstudier på NV-programmet och senare på högskolan är nog de flesta överens om.

Betydelsen av s.k. affektiva faktorer skall inte underskattas. Motivation och självförtroende är mycket viktiga vid matematikinlärning. Ofta har man nog negligerat detta i matematikundervisningen. Hur kan vi då anordna elevernas studier i algebra och matematik så att deras självförtroende stärks ?

Andra frågeställningar av intresse är om det finns några speciella hinder som försvårar respektive underlättar inlärningen av algebra. Är t.ex. algebrainlärning något som sker språngvis så att när man övervunnit ett visst hinder gör man väsentliga framsteg ? För vissa elever verkar så vara fallet. Andra frågor av vikt är hur pass stabila algebrakunskaperna är och vad vi kan göra för att bibehålla upp-nådda färdigheter.

Frågan om hur hjälpmedel som datorer och räknare – grafritande såväl som symbolhanterande - skall påverka undervisningen i algebra är också av intresse. Vilka manuella färdigheter behöver eleverna kunna i dag och hur säkra skall de vara i att utföra dem? Ökad säkerhet fordrar mer tid för övning och den tiden skulle kanske hellre användas för att t.ex. öka begreppsförståelsen och träna mer problemlösning. Hur och vilken färdighetsträning som behövs för förståelse i algebra är inte på något sätt klarlagt av forskningen.

Metod

För att försöka få en allsidig bild av såväl elevernas färdigheter som deras tankar och attityder till matematik i allmänhet och algebra i synnerhet, var vi från början inställda på att använda oss av såväl kvantitativa som kvalitativa metoder i vår studie. Enbart hårddata från kvantitativa test och undersökningar ger visserligen mer precisa resultat som är möjliga att presentera i sifferform, men saknar samtidigt det djup och den flexibilitet man bör kräva när en sådan här undersökning genomförs. Om båda typerna av metoder används, kan de komplettera varandra och ge den helhetsbild, som eftersträvas.

De kvantitativa metoderna bestod främst av en serie test av elevernas färdigheter (se nedan under *Resultat*). I samband med starten i åk 1 tog vi reda på vilka förkunskaper de hade med sig från grundskolan, både i algebra och inom andra matematikområden. Testet bestod av uppgifter till vilka endast svaren skulle lämnas, och dessa bedömdes enbart som rätt eller fel. Nästa test i algebra gjordes i början av åk 2 och innehöll delvis likadana eller likartade uppgifter som första testet, men nu även några svårare uppgifter. Eleverna fick också på vissa uppgifter visa hela lösningar på uppgifterna. Vi ville med testet främst se vilka förändringar, som skett av algebrafärdigheterna under första året. I slutet av åk 2 kom nästa test, vars syfte var att se vilka färdigheter, som var stabila, när andra avsnitt av matematiken blev mer framträdande i matematikundervisningen. Ett avslutande test gjordes i slutet av åk 3, återigen för att försöka urskilja de stabila färdigheterna. I detta test ingick även elever, som helt valt bort matematik under sitt sista år. Resultatet av detta test presenteras utförligt nedan.

Till de kvantitativa resultaten får också räknas de noteringar vi gjort om elevernas betygsmässiga resultat. Som ett slags mått på om eleverna ”lyckats” med sina matematikstudier på NV-programmet har vi satt att de skulle klara kurserna Matematik A till och med Matematik D med minst betyget Godkänt. Detta har bl. a. diskuterats i ett par av våra tidigare rapporter (Persson & Wennström 2000b, 2000c).

För den kvalitativa delen av studien har vi använt lite olika metoder. I samband med de olika testen eller någon dag senare har eleverna också fått besvara enkäter med ganska öppna frågeställningar. Dessa har t ex bestått i att eleverna fått skriva längre förklaringar till innebörden av vissa algebraiska uttryck eller till vad ord som ”ekvation” och ”funktion” betyder, men det har också varit frågor om elevernas inställning till matematik och algebra. Svaren på dessa frågor har vi i vissa fall klassificerat, eller har vi sammanställt vad vi anser vara representativa urval av svar i våra presentationer.

Efter testerna och enkäterna vid starten av åk 1, tog vi i två klasser (där vi själva undervisade) ut ett tjugotal elever, som vi ansåg vara representativa för olika resultatnivåer på testen och för olika enkätsvar (stratifierat urval). Dessa elever intervjuades närmare om algebra samt deras attityd till matematikämnet, och deras svar användes för att ytterligare exemplifiera uppfattningar och missuppfattningar kring betydelser och användningar av algebraiska begrepp. Samtliga intervjuer genomfördes under höstterminen i åk 1. Intervjun som metod är inte lätt att använda. Den är tidskrävande och bjuder på olika tekniska svårigheter. För att få resultat, som kan användas, måste man hålla sig till ett fåtal frågor, men samtidigt ge den intervjuade tid och möjlighet att få uttrycka det hon/han vill ha sagt. Det är också lätt att som intervjuare falla i fällan att man i alltför hög grad styr intervjun i vissa riktningar. Dessa saker måste man ha ganska klart för sig, när man använder sig av det insamlade materialet i sina resultat. Vi har inte gjort några klassifikationer av intervjusvar, utan endast använt vissa citat ur dem som exempel på elevers tankar och uppfattningar.

För att ytterligare pejla elevernas kunskaper när det första algebraavsnittet kom i Ma A-kursen, lät vi eleverna i förväg skriva en kort essä med rubriken ”Vad jag vet om algebra”. Detta var främst ett led i undervisningen, men gav också värdefulla upplysningar om elevernas totalbild av begreppsområdet. När avsnittet sedan avslutats, fick eleverna skriva en ny essä med samma rubrik. Båda essäerna delades sedan ut och diskuterades enskilt med eleverna, så att var och en kunde se vilka framsteg hon/han gjort. Detta såg vi som en värdefull reflektion för såväl eleverna, som för oss som lärare och undersökare. Det var också en del i de observationer vi mer eller mindre systematiskt gjorde av elevernas svårigheter med att bemästra algebran. I dessa observationer har också ingått resultat och prestationer på de ordinarie prov och tester, som gjorts i kurserna. Speciellt intresserade har vi varit av att notera avgörande ”trösklar” i algebrafärdigheterna och om det finns vissa specifika algebrasvårigheter för en del elever. Särskilt studerades eleverna, som togs ut till en stödgrupp i matematik under åk 1 (se nedan under *Diskussion av undervisningen i algebra*).

Naturligtvis har även de utvärderingar av matematikkurserna vi låtit eleverna skriva under och i slutet av kurserna varit av intresse för att ge oss en helhetsbild av undervisningen. Dessa har dock ifyllts anonymt, och har därför inte gått att koppla samman till den enskilde eleven. På samtliga våra enkäter och tester har annars eleverna fått sätta sina namn. Detta bl. a. för att vi skulle kunna presentera vår tredje rapport med tio stycken fallstudier (Persson & Wennström 2000b). Men självklart har informationen, om att namnen tagits bort i våra rapporter också lämnats vid samtliga tillfällen.

Vid en undersökning av det här slaget är det även några övergripande problem man måste observera och diskutera:

- Mängden data man samlar in blir till sist väldigt stor. Det går därför inte att presentera alla resultat, utan man måste göra ett urval. Man måste också strukturera resultaten på ett sådant sätt att de blir intressanta såväl som relevanta. Hur kan både vi själva och de, som tar del av våra resultat och de sätt de presenteras på, vara säkra på att vi gjort ett rättvisande urval och att våra egna uppfattningar inte styrt resultaten på förhand?
- Eftersom vi själva har undervisat en del av eleverna, har vi varit både observatörer av och deltagare i undervisningen. Hur påverkar det vår objektivitet? Alla observatörer är mer eller mindre subjektiva, men hur kan vi minimera subjektiviteten? Elever, som deltar i en undersökning, tenderar också att uppnå bättre resultat bl. a. därför att de uppmärksammas mer och upplever undervisningen som mer positiv än vanligt.
- Vår studie har gjorts i en viss miljö med ett begränsat antal elever. Hur generella är våra resultat? Skulle en ny undersökning med en annan grupp elever ge likartade resultat, dvs. vilken reliabilitet har den? Kanske blev resultaten annorlunda om t ex det var ett annat elevantal i klasserna, om vi hade nivågrupperat klasserna eller om undersökningen gjordes på en skola i en större stad?

Dessa problem är inte lätta att lösa och alla som arbetar med experimentell forskning inom undervisningsområdet möter dem.

> *Furthermore, any piece of empirical work in the educational field is inevitably confronted with more complexity than it can handle. The field lacks the clarity of problem definition and the consensus about appropriate problem-solving tools that have obtained in, for example, physics at particular periods. There are no ”critical experiments” in education. Educational research is always easy to attack. For sure,* ***all*** *researchers will have overlooked something, or extrapolated too extravagantly, or made some unwarranted assumptions.* (Wheeler, 1996, sid. 147)

Det är nödvändigt att man är väl medveten om de här problemen antingen man själv arbetar med forskning om undervisning eller om man läser andras arbeten. Ett sätt att pröva hållbarheten i de slutsatser som dras i arbeten av detta slag är att jämföra dem med andras erfarenheter, såväl forskares som lärares.

Resultat

Sammanställning och analys av testet i NV3

I slutet av NV3 genomfördes ett fjärde och sista test (se bil.1). Syftet med detta var framförallt att undersöka vilka algebrakunskaper som är stabila. Speciellt intressant är att se vilken helhetsbild av elevernas algebrakunskaper, som allt insamlat material under tre år ger. Därför kommer vi att göra en del jämförelser med tidigare test. Annat insamlat material kommer också att användas. Tillförlitligheten på våra resultat blir på så sätt bättre än om vi endast använt ett test. Tabellen nedan ger en översikt över testen, tidpunkten för dessa och deras huvudsakliga syfte.

Test 1 (NV1 i aug. HT 98)	algebraisk förmåga och förståelse vid starten i NV1 (se Persson & Wennström, 1999)
Test 2 (NV2 i aug. HT 99)	förändringar under första året i gymnasieskolan (se Persson & Wennström, 2000a)
Test 3 (Sluttest NV2 i maj VT 00)	vilka algebrakunskaper är stabila (se Persson & Wennström, 2000c)
Test 4 (Sluttest NV3 i mars/april VT 01)	vilka algebrakunskaper är stabila

Testet i NV3 bestod av totalt 20 uppgifter. På uppgift 1-8 (totalt 17 uppgifter) skall endast svar lämnas. Helt rätt svar på en uppgift har gett 1 poäng. På uppgift 9 (3 uppgifter) skall också lösning lämnas. För att få 1 poäng på dessa uppgifter skall både lösning och svar vara korrekt. Detta innebär att man kan få totalt 20 poäng. Testet genomfördes utan hjälpmedel (räknare och formelsamling).

74 av 92 elever har gjort testet. Bortfallet beror på en del praktiska och administrativa problem bl. a. kollision mellan olika aktiviteter. Enligt vår bedömning är andelen elever, som gjort testet, dock tillräckligt stort för att vara representativt för elevgruppen som helhet. Vi har dessutom mycket annat material som andra test, intervjuer, enkäter, observationer etc. att jämföra med för att kontrollera tillförlitligheten i våra resultat.

Ett problem med en longitudinell studie, som pågår flera år och utsätter eleverna för ett antal test, enkäter, intervjuer osv., är att man kan ”trötta ut” eleverna. En del av dessa blir svåra att motivera och presterar kanske inte sitt allra bästa på test och enkäter. I vår undersökning har detta inte varit något större problem. Vissa tendenser till bristande motivation har märkts framförallt på de båda sista testen, men de flesta av våra elever har varit mycket samarbetsvilliga och verkligen ansträngt sig.

En annan faktor, som vi berört i en tidigare rapport (Persson & Wennström, 2000c), bör också noteras. Elevernas inlärningssituation – speciellt i NV2 - har inte varit bra. 1994 års kursplaner har varit alldeles för ambitiösa i förhållande till den disponibla tiden. Eleverna har på alltför kort tid mött en mycket stor mängd nya begrepp i algebra, funktionslära och differential- och integralkalkyl. Detta har definitivt påverkat inlärningen i algebra negativt.

I analysen av testet kommer vi inte alls att diskutera elevernas totalpoäng. Denna är relativt ointressant. Vi kommer att koncentrera oss på de enskilda uppgifterna och kommentera dessa uppgift för uppgift.

1. Lös ekvationerna nedan

   a) $4x - 15 = 75 - x$ (72%)

   b) $\frac{x}{5} - 6 = 14$ (86%)

   c) $x^x + 3 = 7$ (70%)

   d) $(x - 3)(2x + 1) = 0$ (28%)

Uppgift 1a förekom också på sluttestet i NV2 med lösningsfrekvensen 74%. På tidigare test har förekommit den något enklare ekvationen : $4x - 15 = 75$ (HT NV1 71%, HT NV2 86%). De felsvar (x=15, x=20, x=30 o. dyl.), som förekommer på 1a, är troligtvis till största delen slarvfel.

De flesta elever klarar av 1b utan problem. Även denna uppgift förekom på sluttestet i NV2. Lösningsfrekvensen var 86% då. Om svaret x=76, som en del elever får, beror på slarv eller bristande förståelse för bråk och ekvationer är svårt att avgöra. Andra uppgifter på detta och tidigare test visar dock klart att många elever – kanske de flesta - har bristande förmåga i att hantera bråk och rationella uttryck. På tidigare test har förekommit ekvationen: $\frac{x}{5} + 6 = 14$ (HT NV1 81%, HT NV2 85%). Slutsatsen blir att elevernas förmåga att lösa ekvationer av typ 1a och b är relativt stabil sedan högstadiet.

Uppgift 1c visar att de flesta elever har klart för sig vad som menas med en lösning till en ekvation och att de kan hitta lösningar med prövning. Jämför vi med liknande uppgifter på de tidigare testen $2^x + 1 = 17$ (VT NV2 81%) och $2^x - 1 = 7$ (HT NV1 51%, HT NV2 74%) ser vi att eleverna gjort framsteg under gymnasietiden.

På uppgift 1d är lösningsfrekvensen låg. Av många elevers svar – ca hälften - framgår att de multiplicerat parenteserna och sedan använt formeln för lösning av en andragradsekvation. Om de gör detta korrekt får de $1{,}25 \pm \sqrt{1{,}25^2 + 1{,}5}$. Men utan räknare har de svårt att beräkna detta. Det anmärkningsvärda är att så många elever inte direkt kan se lösningen utan väljer att först multiplicera parenteserna och sedan använda formeln. Vi kanske för mycket betonar ”formeln” vid lösning av andragradsekvationer. Kanske skulle vi i stället använda andra metoder som direkt faktoruppdelning och kvadratkomplettering? Många elever visar på denna uppgift mest instrumentella färdigheter och mindre förståelse för ekvationslösning.

2. Förenkla uttrycken

   a) $3(4 - 3x) + 4(3 - 4x)$ (VT NV3 77%, VT NV2 82%)

   b) $3(4 + 3x) - 4(3 - 4x)$ (VT NV3 88%, VT NV2 83%)

   c) $(2x - 5)(3x + 4)$ (VT NV3 84%, VT NV2 77%)

   d) $\frac{2x^2 - 8}{x - 2}$ (VT NV3 22%, VT NV2 32%)

Dessa fyra uppgifter förekom också på sluttestet i NV2. På uppgift 2a-c är resultaten ungefär desamma i NV2 och NV3. Om vi jämför med liknande uppgifter från tidigare test

$10x + 3(4 - 3x) + 8$ (HT NV1 54%, HT NV2 88%),

$10x - 3(4 - 3x) - 8$ (HT NV1 42%, HT NV2 77%)

$(2x - 5)(3x + 4)$ (HT NV1 19%, HT NV2 79%)

ser vi att den förbättring i att skriva om algebraiska uttryck, som eleverna uppnått i NV1, verkar vara stabil. Detta stödjer den slutsats vi framfört i tidigare rapporter om att den väsentliga delen av förenklingsalgebran kan vänta till åk 1 i gymnasieskolan. Intressant i det här sammanhanget är att notera att redan 1987 framförde Ekenstam och Greger liknande tankar i en uppsats om elementär algebra i åk 9.

> *The customary way of teaching elementary algebra has to be reassessed: algebraic transformations and manipulations, described at the beginning of this article seem to be introduced too early and too quickly.* (Ekenstam & Greger, 1987, sid 312)

De fel, som eleverna gör på dessa typer av uppgifter, är antingen slarvfel eller har sin grund i dålig talförståelse av negativa tal. Svar på 2a som 25x – 24, 24 + 25x, 24 + 7x osv. och –7x, 7x osv. på 2b tyder på en osäkerhet i hanteringen av minustecken: Denna osäkerhet beror utan tvekan på att eleverna inte riktigt förstått minustecknets olika roller. Mer träning på förenklingsalgebra hade inte löst dessa problem.

Det dåliga resultatet på 2d kom inte som någon överraskning. Som vi konstaterade redan efter sluttestet i NV2 är den främsta orsaken till detta dålig förståelse av rationella tal (Persson & Wennström, 2000c). Tidsbristen i NV2 gjorde det omöjligt att reparera elevernas brister i bråkräkning. Om man inte ordentligt behärskar och förstår räkning med bråk blir det i stort sett meningslöst att arbeta med rationella uttryck.

Uppgift 3 och 4 testade förståelsen av bokstavssymboler på de högsta nivåerna enligt Küchemans klassifikation (Kücheman, 1981, se även Bergsten et al, 1995).

- Letter as generalized number
- Letter as variable

3. Vad kan man säga om c om $c+d=10$ och $c<d$? (61%)

4. Vilket är störst 2n eller n + 2.? Förklara! (41%)

På uppgift 3 har inte svar av t.ex. typen $0\le c\le 4{,}9$ och $1\le c\le 4$ gett poäng. Men även om dessa svar inte är helt korrekta visar de ändå att eleven har förståelse för ”letter as generalized number”. På uppgift 4 förekommer också ett antal svar, som inte varit korrekta, men ändå uttrycker en förståelse för ”letter as variable” t.ex.

$2n<n+2$ $n=1$, $2n=n+2$ $n=2$, $2n>n+2$ $n=3$ och
om $n>1{,}5$ är 2n störst

De flesta felaktiga svar på dessa båda uppgifter visar således trots allt en rimlig förståelse för vad bokstäverna står för. Slutsatsen blir att de flesta elever har nått de högsta nivåerna enligt Küchemans schema.

Uppgift 5 är det klassiska student-professor problemet (se t.ex. Kieran, 1992, sid 393).

5. På en skola finns det 9 gånger så många elever som lärare. Ställ upp en formel mellan antalet elever E och antalet lärare L........ (59%)

Majoriteten av eleverna klarar detta problem, men att ca 30% ger det felaktiga svaret L=9E, ger anledning till viss eftertanke.

Uppgift 6 är ett vanligt mönster.

```
* *   * * *   * * * *   * * * * *
      * * *   * * * *   * * * * *
              * * * *   * * * * *
                        * * * * *
fig.1  fig.2    fig.3      fig.4
```

6. Hur många stjärnor finns i
   a) fig. 5 ? (92%)
   b) fig. 100 ? (66%)
   c) fig. n ? (66%)

Resultatet får anses som någorlunda tillfredsställande – speciellt att så många kan ställa upp en generell formel. Det kunde inte merparten av eleverna, då de började sina gymnasiestudier i matematik (Persson & Wennström, 1999).

Även nästa uppgift handlar om att från text ställa upp ett algebraiskt uttryck

7. Av en ståltråd med längden 12 cm klipps biten x cm av. Av biten med längden x bildas en cirkel och av den andra biten en kvadrat.
   a) Bestäm cirkelns radie uttryckt i x. (35%)
   b) Bestäm kvadratens sida uttryckt i x. (69%)

På uppgift 7a svarar drygt 10% $\sqrt{\frac{x}{p}}$. De har således förväxlat area och omkrets, men har ändå klarat av algebran i en svårare uppgift. Att dubbelt så många klarar av 7b som 7a är faktiskt lite förvånande. På testet i slutet av NV2 förekom två liknande uppgifter:

I en rektangel är summan av längden och bredden 20 cm. Om längden är x cm, ställ upp en formel för arean A uttryckt i x. (65%)

I en rektangel betecknas längden med x och bredden med y. Arean är 100 cm^2 . Ställ upp en formel för omkretsen O uttryckt i x. (51%)

Man kan konstatera att förmågan att från text ställa upp algebraiska uttryck kunde ha varit bättre. Kanske detta behöver tränas mer än manuella algebraiska förenklingar ?

Nästa uppgift testar förmågan att tolka ett algebraiskt uttryck.

8. Äpplen kostar a kr/st och päron b kr/st. Förklara vad uttrycket 3a + 5b betyder. (74%)

Svaret ”3 äpplen och 5 päron” har ej godkänts. Men är det säkert att elever med detta svar <u>ej</u> har förstått vad som menas med uttrycket? Det kan lika gärna vara så att de har förstått meningen med uttrycket, men uttryckt sig kortfattat och olämpligt. Merparten elever som gett detta svar har lyckats relativt väl med att ställa upp algebraiska uttryck (uppg. 5-7). Därför är det troligt att dessa elever förstår vad som menas med uttrycket. Slutsatsen blir att de allra flesta elever kan ge en rimlig tolkning av uttrycket ovan.

På sluttestet i NV2 förekom uppgiften:

Långsidan på en rektangulär gräsmatta är 25 meter längre än kortsidan. Förklara kortfattat vad ekvationen nedan kan betyda.
$2x + 2(x + 25) = 250$ (57%)

För att få poäng på denna uppgift skulle eleverna både ange att det gällde omkretsen och vad x var. Även de elever (27%) , som endast angav att det handlar om omkretsen, har ju förstått vad ekvationen beskriver. Av resultatet på dessa båda uppgifter framgår att de flesta elever kan tolka enkla algebraiska uttryck.

På uppgift 9a-c skulle lösning lämnas. Endast helt korrekta lösningar med rätt svar har gett poäng. Genom att vi har tillgång till elevernas lösningar, kan vi mer i detalj diskutera olika feltyper.

9. Lös ekvationerna nedan
   a) $2x^2 + x - 3 = 0$ (12%)
   b) $4(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 39$ (31%)
   c) $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{3}$ (43%)

Resultatet på 9a kan tyckas deprimerande dåligt. Men problemet är att merparten av eleverna (ca 60%) väljer att lösa ekvationen med hjälp av formeln för andragradsekvationen och då räknar med decimaltal. Eftersom de inte får använda räknare på testet får de numeriska problem. T.ex. fastnar de då de skall beräkna $-0,25 \pm \sqrt{1,5625}$. En hel del små numeriska fel förekommer också i sammanhanget. Om man i stället använder sig av bråk, blir räkningarna mycket enklare. Men eftersom elevernas förmåga att räkna med bråk är dåligt tränad undviker de detta. Således vet de flesta elever hur de skall lösa en andragradsekvation, men bristande förmåga att utföra numeriska beräkningar utan hjälpmedel ställer till problem.

Uppgift 9b förekom också på sluttestet i NV2 med lösningsfrekvensen 49%. Att det blivit en viss försämring beror nog främst på att det är länge sedan man sysslat med uppgifter av det här slaget. De flesta fel som förekommer är slarvfel som att $12x + 3 = 39$ blir $12x = 42$ och att $4(x^2 + 2x + 1) - (4x^2 - 4x + 1) = 39$ blir $4x^2 + 8x + 8 - 4x^2 + 4x - 1 = 39$. En hel del smärre teckenfel förekommer också. Men de flesta elever vet hur man skall hantera uttryck av den här typen även om de gör mindre slarvfel. Vad som brister är färdighetsträning i manuell räkning. Men frågan är om det är det vi skall använda tiden till.

Uppgift 9c har överhuvudtaget inte behandlats av drygt 25%. En orsak till detta är säkert ovanan vid att arbeta med rationella uttryck. Att ändå nästan hälften av eleverna löst uppgiften korrekt är hyfsat. En enklare version av uppgiften förekom på sluttestet i NV2 $\frac{4}{x-2} = \frac{2}{3}$ med lösningsfrekvensen 61%. Men i det fallet är det lätt att genom prövning få x=8.

Sammanfattningsvis kan noteras:

- Lösning av vanliga ekvationer fungerar tillfredsställande. De flesta fel som förekommer är slarvfel.
- De flesta elever förstår vad en lösning till en ekvation är och kan genom prövning avgöra om ett visst tal är en lösning eller ej. Lite fundersam blir man dock, när merparten av elever inte direkt kan hitta lösningarna till en ekvation av typen $(x - 3)(2x + 1) = 0$.
- Fel på enklare förenklingsalgebra beror i de flesta fall på dålig talförståelse av negativa tal – minustecknets olika roller.

- Merparten av våra elever behärskar grundläggande förenklingsalgebra även om säkerheten vid manuell räkning kunde ha varit bättre.
- Förmågan att hantera bråk och rationella uttryck är mycket bristfällig.
- Förmågan att ställa upp och tolka algebraiska uttryck är relativt hyfsad, men bör förbättras.

Enkäter

Eleverna fick också besvara en enkät (se bil.2). Tyvärr, blev bortfallet relativt stort - 50 elever av 92 besvarade enkäten. Detta skall jämföras med tidigare enkäter i åk 1 och 2, då bortfallet blev väldigt litet. En orsak till det stora bortfallet i åk 3 är säkert att eleverna i slutet av gymnasietiden utsätts för många – alltför många - enkäter, kursutvärderingar osv. Många elever orkar helt enkelt inte med att besvara dessa och är ofta dåligt motiverade att göra det.

Detta innebär att man måste vara försiktig med att dra alltför generella slutsatser från den här enkäten. En del synpunkter av allmänt intresse har dock framkommit. Vi ger ett urval nedan med efterföljande kommentarer.

1. **Vad tycker du om matematik nu, när du strax skall sluta skolan? Förklara t.ex. i termer som roligt - tråkigt, lätt - svårt osv. Förklara gärna varför du tycker som du gör.**

   Ganska tråkigt, men jag tror att det beror på att jag tycker det är svårt. Men under vissa avsnitt har det varit intressant t.ex. geometri. särskilt svårt var det när vi började med algebra i Ma B. Till en början var det OK men sen blev det så många regler och tillvägagångssätt att det blev för svårt och då också tråkigt. Men jag har märkt att det blev intressantare om det vi läste var kopplat till verkligheten, som geometri. Algebra är ju mest bara ett sätt att tänka och svårt att översätta till verklighet.
   (pojke – har ej läst Ma E)

   Som jag tidigare har sagt, tycker jag att det är roligt med matematik. Men nu i gymnasiet märks det att ribban har höjts några steg! Det har varit mycket svårare men samtidigt roligare eftersom allting kan sättas in i verkliga situationer. Speciellt nu i trean har det varit svårt och man har kanske inte riktigt fattat hur och när man ska använda de olika sakerna. Fast allt har ju inte varit svårt! Det har funnits en hel del lätt matematik också. Tycker man det är lätt och man förstår det då tycker man också att det är roligt! Så se till att eleverna verkligen förstår, för då blir de intresserade och lyssnar på vad Du har att säga!
   (flicka – har läst Ma E)

   Både och! Jag brukar inte vara glad för matte. Vad jag tycker är roligast är dock lite kluriga problemlösningar & ekvationer. De kan till och med vara riktigt roliga.
   (flicka – har läst Ma E)

   Matten har blivit mycket svårare det senaste året. Det har blivit lite svårt att hänga med på allt.
   (flicka – har läst Ma E)

   En utmaning, intressant.
   (pojke – har läst Ma E)

Jag tycker att det känns bra att ha de mattekunskaper som man nu har efter 3 års studier. Matematikkurserna är en bra grund att stå på inför fortsatta studier på högskola. (flicka – har läst Ma E)

Jag tycker att matte är tråkigt därför att det behandlar saker som man har absolut noll nytta av i ett vanligt Svensson liv.
(pojke – har ej läst Ma E)

Roligt när man förstår det. När det flyter känns det djäkligt bra för hjärnan.
(flicka – har läst Ma E)

Tråkig, stressad kurs (Ma E) med för lite timmar. Överlag har man känt sig stressad alla 3 åren.
(flicka – har läst Ma E)

2. Hur har du upplevt gymnasieskolans matematikundervisning ? Vad har varit bra ? Vad har varit dåligt ? Förbättringsförslag ?

Det har varit en bra undervisning och förklaring på lektionerna. Dåligt var det när vi gick i tvåan och fick flera sidor att göra varje dag. Vi skulle alltså enligt mig ha försökt att minska ner det vi skulle lära oss och koncentrera oss på det allra viktigaste. Matten har varit bra, men jag har aldrig tyckt om ämnet så det har ju varit svårt.
(pojke – har ej läst Ma E)

Jag tycker att undervisningen har varit bra och böckerna har varit lätta att förstå. Tyvärr, tycker jag att tiden har varit knapp inom vissa områden. Man har inte hunnit smälta det ena riktigt förrän man har börjat gå igenom nästa. Det är lite synd, för i de högre kurserna (Ma D, E, F) har kunskaperna inte varit som de borde vara. Man minns det bara lite vagt och så skall det väl inte vara?
(flicka – har läst Ma E)

Någorlunda. Hade velat ha lite mer konkreta förklaringar och inte bara ”så här gör man”.
(flicka – har läst Ma E)

Tiden har inte räckt till på D- och E-kurserna. A o B-kursen hade för mycket tid, tycker jag. Det är bra med genomgång vid tavlan. Man förstår bättre då.
(flicka – har läst Ma E)

Den har varit bra. Hade varit bra med fler timmar i de olika kurserna bara. Lagom med genomgång
(pojke – har läst Ma E)

A-, B- och E-kursen är fördelade på ett normalt timantal medan C & D kursen var alltför explosionsartad.
Något som jag anser som <u>mycket dåligt</u> är att vår klass stod utan mattelärare mitt i C-kursen. Lärarbytet medförde turbulens och lektionerna blev allmänt störiga för att några visade sitt missnöje genom att sabotera för andra klasskamrater. Sedan i trean fick vi

ytterligare ett lärarbyte visserligen till det bättre, men luckor från C- & D-kursen & ytterligare en omställning gjorde sitt. Jag kan acceptera att man byter lärare när en kurs är avslutad och en ny startar. Men mitt i en kurs tycker jag är oacceptabelt. Mycket tid gick bort, vilket är synd eftersom C- & D-kursen skulle avverkas på mycket kort tid.
(flicka – har läst Ma E)

Det har varit dåligt att vi fått byta lärare så ofta. C och D kurserna gick väldigt fort, kändes som om tiden inte räckte till.
Det är viktigt att mattelärarna är bra pedagoger. Det har ingen betydelse hur duktiga de är i matte om de inte kan lära ut. Därför tycker jag det är mycket viktigt att naturare o teknister, som går så fort fram i matte får <u>utbildade</u> mattelärare.
(flicka – har läst Ma E)

Vi har haft 3 olika mattelärare både bra och mindre bra. Det har försvårat mycket för mig som inte hade så lätt från början.
(flicka – har ej läst Ma E)

Ma A+B = bra. Många lektioner i veckan. Ma C+D = så där. Det var helt nya saker. Färre timmar i veckan gjorde också att det blev svårare än föregående kurser. Ma E var svårt. Alldeles för få lektioner i veckan. Inget/lite sammanhang. Ny lärare gjorde det också svårare.
(flicka – har läst Ma E)

Läraren var jättebra, men klasserna borde vara mindre och inte bli större i Ma E.
(flicka – har läst Ma E)

En ofta förekommande synpunkt är tidsfaktorn. Många elever tycker det går för fort. Speciellt C- och D-kursen har upplevts som mycket stressiga. Det är en synpunkt som framförts i stort sett av alla elever vi haft, som följt 1994 års kursplaner – inte bara de som varit med i den här undersökningen. E-kursen blir sedan svår eftersom man har en dåligt tillgodogjord D-kurs. En allvarlig negativ effekt av stressen är att i en del fall försvinner den positiva attityd till matematik, som eleverna fick under första året i gymnasieskolan. Efter A- och B-kursen kunde vi notera att ett antal elever blivit positivare till matematik (Persson & Wennström, 2000a). Frågan är om inte stressen under andra året förstörde detta.

Vi måste hålla med den elev som säger *” Vi skulle alltså enligt mig ha försökt att minska ner det vi skulle lära oss och koncentrera oss på det allra viktigaste”.* Eleverna har på C- och D-kursen haft en inlärningssituation som för de flesta varit orimlig. Tiden har inte möjliggjort någon djupare förståelse för alla de nya begrepp eleverna mött. I bästa fall har eleverna uppnått vissa instrumentella färdigheter inom t.ex. differential- och integralkalkyl. De nya kursplanerna innebär en förbättring vad gäller den disponibla tiden, men om detta är tillräckligt för att förbättra inlärningssituationen väsentligt återstår att se. Problemet med alltför ambitiösa matematikkurser i förhållande till disponibel tid, borde nog utredas ordentligt både av forskare och dem som skriver kursplaner (se t.ex. Wennström, 2001).

Elever framhåller ofta hur viktigt det är att man förstår vad man gör för att det skall vara roligt. Förstår man och lyckas blir matematik roligt. En viktig faktor för förståelse – kanske den viktigaste – är att man får tid på sig för att tillgodogöra sig stoffet. Det kan man inte påstå att våra elever fått.

En annan viktig synpunkt som framförs i enkäten är problemet med lärarbyten. Många elever upplever detta som mycket störande och då handlar det inte om att den nye lärarens undervisning skulle vara sämre. Kanske ett ämne som matematik genom sin struktur har extra stort behov av kontinuitet i undervisningen. Behovet av att ha utbildade matematiklärare, som inte bara kan matematik utan även kan undervisa i matematik, framförs också.

Diskussion av undervisningen i algebra

När en studie av elevers lärande görs på fältet, använder man sig inte så sällan av annorlunda undervisningsmetoder, som man gärna vill visa resultatet av. Hur intressant studien än är, måste man därför fråga sig hur överförbara resultaten egentligen är till det dagliga arbetet i skolan. Kanske dessa metoder bara fungerar under vissa omständigheter med en viss grupp elever? I så fall blir det svårt att omsätta studiens resultat till praktisk användning. Därför vill vi gärna understryka, att vi inte anser att den undervisning de elever fått, som ingår i vår studie, skiljer sig på något avgörande sätt från det som brukar betecknas ”traditionell undervisning” inom ämnet matematik. Eftersom fyra olika klasser med fyra olika lärare deltagit, är det naturligtvis omöjligt att avgöra om våra något skilda sätt att genomföra matematikundervisningen också givit något skilda resultat. Det har dock vid samtal med de övriga lärarna inte framkommit något, som tyder på att våra arbetssätt varit särskilt olika.

I matematikundervisningen har vi lagt stor vikt vid det didaktiska samtalet med eleverna kring begrepp, metoder, problemlösning mm. Detta samtal bör ske i varierande grupperingar och mellan olika personer i klassrummet. Vissa övergripande diskussioner kan ske med hela klassen, andra i mindre grupper. Viktigast för den enskilde elevens utveckling är kanske ändå dialogerna lärare - elev och elev – elev. Ett arbetssätt där eleven får tillräckliga möjligheter att berätta hur de tänker och jämföra med andras sätt att tänka är nödvändigt. Läraren får härigenom möjlighet att hjälpa eleven att komma vidare i sin begreppsutveckling på den nivå hon/han befinner sig. Detta gäller givetvis också i högsta grad de abstrakta begrepp vi finner i algebran.

Vi ansluter oss i grunden till det konstruktivistiska synsätt, som innebär att vi ser kunskap som en av individen själv uppbyggd meningsfull tankevärld. Därför måste varje elev själv arbeta med att bygga t ex en funktionsduglig konstruktion, som heter ”Algebra”. Men detta arbete måste, för att det ska bli meningsfyllt och leda framåt, ske under kommunikation med andra människor. Därvid ansluter vi oss till Vygotskys tankar om den stora betydelse språket har som verktyg för tänkandet i lärandeprocessen (Vygotsky, 1986).

Det matematiska samtalet har traditionellt förts mellan lärare och elev, där läraren styrt samtalet till största delen. Här ser vi nog, att det är viktigt att läraren är mera lyhörd för elevens tankegångar och i högre grad bygger på dem i diskussionen. Annars är risken stor att dialogen förvandlas till en monolog, vilket inte främjar elevens tankebygge. Eleven kommer då inte vidare i sin matematiska utveckling och befäster kanske till och med felaktiga uppfattningar. För att lösa upp sådana felaktigheter och hjälpa elever förbi ”trösklar”, måste läraren ständigt utgå från den enskilde elevens tankar i sin dialog.

Ibland blir det lättare om diskussionen förs mellan elev och elev, antingen parvis eller i grupp. Det är därför viktigt att det i klassrumsarbetet ges tid och utrymme för detta. Vi har uppmuntrat våra elever till att arbeta tillsammans mer eller mindre organiserat. Till exempel har elever fått lösa problem i grupper på 3 – 4 st. Man har diskuterat och försökt lösa problemet tillsammans, men oftast är det någon i gruppen, som först får en riktig idé om hur det ska lösas. Instruktionen har då varit, att den eleven skulle förklara lösningen för samtliga andra i gruppen, så att var och en kan visa lösningen för hela klassen. Det är vanligen prestationsstarka elever, som först klarar problemet, men dessa upplever att de förstår lösningen ännu bättre när de fått förklara för någon annan. Denna upplevelse kan sedan användas i det fortlöpande arbetet i klassrummet. Utan någon speciell organisation har elever uppmanats att hjälpa varandra, vilket ofta utmynnat i att en starkare elev visar sitt sätt att tänka för den svagare. Här är det naturligtvis av yttersta vikt att man har ett positivt klassrumsklimat med vi-känsla och utan konkurrenstankar. Både den starkare och den svagare eleven uppfattar denna dialog som mycket positiv, och den stärker också bådas självförtroende vad det gäller att klara nya arbetsuppgifter. Denna samarbetsinlärning har en del lärare valt att göra i en ännu mera organiserad form (cooperative learning), men det steget har vi inte tagit med våra elever.

För att möta problemet med att elevernas färdighets- och begreppsnivåer i en klass är så olika, är det ganska vanligt idag att man i matematik nästan helt överger en sammanhållen undervisning. Eleverna får arbeta fullständigt individualiserat och ”i egen takt”. Detta innebär att man arbetar mycket läroboksstyrt med huvudsakligen enskilt tyst räknande och att målet med matematiken är, att man ska komma så snabbt ”framåt” som möjligt och klara ett Godkänt betyg på kursen. Vi anser, att ett sådant arbetssätt ger väldigt ytliga och instrumentella färdigheter med dålig eller ibland felaktig begreppsbildning som följd. De ”duktiga” eleverna upplever matematiken som ett slags hastighetstävling, medan de ”svaga” eleverna blir lämnade på efterkälken. De ”svaga” här är oftast de språksvaga, vilket i sin tur innebär de, som kommer ur svaga samhällsgrupper. Kanske en duktig och erfaren lärare klarar att ge dessa elever en god matematikundervisning genom sina dialoger med dem, men vi sätter ändå generellt ett frågetecken för ett sådant arbetssätt.

I de fall man har parallellklasser, som våra fyra NV-klasser var, förekommer det på många skolor att man gör en nivågruppering. Lärarna får då möjlighet att bedriva undervisning i grupper, som har relativt homogena kunskaper och färdigheter. Vi har dock haft invändningar mot den här metoden bl. a. av skäl som redovisats ovan. Elever befinner sig inte på en konstant ”nivå” i förhållande till sina kamrater i exempelvis algebra, utan tankekonstruktionen sker ojämnt och i språng. Vissa delar är kanske mer utvecklade än hos en kamrat, medan andra delar är mindre utvecklade. Det kan vara direkt hämmande för en elev att placeras i en viss ”nivå”, även om hon/han för stunden får en undervisning, som är ganska väl anpassad vad gäller färdigheterna. Men hur går det på sikt? Och hur går det med de stora fördelarna med samarbetsinlärning?

Vi använder en annan modell för NV-klasserna på vår skola, nämligen en extra stödtimme i veckan under årskurs 1 för de elever som behöver det. Lärarna tar ut dessa elever på grundval av test, prov, samtal m m. Stödgrupperna får inte vara statiska, utan måste revideras fortlöpande beroende av elevernas behov. Grupperna bör dock inte överstiga 10 elever i antal, eftersom den undervisande läraren måste få tillräcklig tid för samtalen med de enskilda eleverna. Hur stödgrupperna fungerat och vad eleverna tyckt om dem har vi utförligare beskrivit i vår andra rapport (Persson & Wennström 2000a). Avsikten har varit att kompensera dessa elever genom att ge dem mer tid, både för diskussioner och för att prova andra angreppssätt för sina svårigheter. Det har också varit viktigt att stärka deras självförtroende och göra matematiken positivare, dvs. vi har satsat medvetet på de affektiva faktorerna. Modellen har nu använts några år, och vi anser att den slagit väl ut. De syften vi har vad gäller elevernas utveckling verkar vi uppnå i stor utsträckning. Vi ser därför inga skäl att överge modellen, utan vi kommer att använda den även i fortsättningen.

Forskande lärare

Det är ett välkänt faktum att det är en klyfta mellan forskare i utbildningsvetenskap (pedagogik, matematikdidaktik osv.) och praktiserande lärare. Forskare uttrycker ofta sin besvikelse över att lärare inte intresserar sig speciellt mycket för deras resultat. Lärarna anser å sin sida att den akademiska forskningen sällan är relevant för deras problem i skolan. Många har uttryckt sitt bekymmer över situationen.

> *First, there is no readily accessible form of communication by which teacher can learn of research findings and how they might be applied to classroom instruction. Some of the journals of mathematics education research have as specific goals to disseminate*

cognitive findings and discuss their instructional implications; however, many of the published articles appear to be written primarily for other researchers. Second, teachers have very little time to hunt down research results in nearby university libraries. Yet this is what must be done in most cases. In-service courses on algebra teaching and collaboration with researchers, though effective in raising teachers´ awareness levels of other approaches worth trying in their classroom are often even more difficult to find. (Kieran, 1989, sid. 413*)*

This means that researchers must select those research questions that are important to teachers and that have the potential for fairly immediate application; researchers must also consider ways of more directly involving teachers in the research process, with possible consequences for the kind of methodology adopted.
(Booth, 1989, sid. 245)

The separation of researchers from practitioners, and of theory from practice, is common to most professional activity in many societies. The structure of academic institutions, which distinguish ”pure” and ”applied” science, and institutionalized differential career opportunities, reinforce the separation. In education the gap is particularly wide and distressing. This is not so much because teachers do not want technical help, nor because researchers would not be able to supply it, but because each group is embedded in a different situation with its own goals, responsibilities and rewards. Researchers are not recognized by the extent to which their work proves useful to teachers, nor are teachers recognized by the extent to which they are informed about and use the latest research.
(Wheeler, 1989, sid 278)

Under senare år har man diskuterat om inte ett sätt att överbrygga klyftan mellan forskare och lärare skulle vara att mer aktivt engagera lärare ute i skolan direkt i forskningen. Man talar om forskande lärare (se t.ex. Grevholm, 2001; Crawford & Adler, 1996).

Teorier och forskning om lärande och undervisning i matematik når i begränsad utsträckning fram till dem som arbetar med undervisning och lärande i matematik i praktiken, dvs. lärarna i skolan. Kanhända är lösningen för att överbrygga gapet mellan teori och praktik att läraren, praktikern själv, blir forskare och den som ställer frågorna och utför undersökningarna som har relevans för praktiken.
(Grevholm, 2001, sid. 257)

Grevholm preciserar forskande lärare på följande sätt.

I ett försök att precisera vad jag menar med läraren som forskare vill jag säga att det även krävs att läraren försöker på ett systematiskt sätt finna svar på sina frågor genom att relatera förklaringsmodeller som har sin grund i teorier till egna strukturerade försök i klassrummet. Resultaten bör granskas kritiskt och utsättas för diskussion samt publiceras innan vi kan betrakta arbetet som forskning.
(Grevholm, 2001, sid. 258)

Eftersom vi i denna mening varit forskande lärare är det ganska naturligt att i denna avslutande rapport reflektera lite kring forskning i matematikdidaktik och de erfarenheter vi fått.

Vår undersökning har gjort att vi kommit i kontakt med forskningen inom området lärande och undervisning i algebra. Genom läsning av litteratur inom området har vi fått en ökad kunskap om inlärningsprocesser och problem vid algebrainlärningen. Enligt vår mening kan en ökad kunskap om gjord relevant forskning definitivt bidra till att förbättra lärares praktik, men det är då viktigt att forskningsresultaten noga vägs mot och anpassas till lärarnas praktiska erfarenhet.

Genom att vi i detalj har studerat inlärningen av ett område – algebra – har vi blivit varse en del faktorer, som vi kanske inte beaktat tillräckligt tidigare t.ex. betydelsen av förståelsen av negativa tal för att kunna göra algebraiska förenklingar, vikten av att i detalj analysera elevernas fel osv. Klassrumsforskningen ger nya perspektiv på den egna undervisningen och kan hjälpa läraren att förbättra sin praktik.

Att skriftligt dokumentera arbetet är oerhört viktigt. Själva skrivprocessen bidrar till en fördjupad analys och reflektion över den egna undervisningen. Lärare lever till stor del i en talande kultur. Man diskuterar mycket med kolleger och om man skriver blir det oftast interna rapporter. Detta medför att mycket värdefull lärarkunskap sällan når utanför den egna skolan – ibland inte ens det egna klassrummet. Genom att lärares undersökningar, försök och reflektion över verksamheten dokumenteras skriftligt och sprids utanför den egna skolan i form av rap- porter och artiklar får fler inom utbildningssamhället ökad kunskap om inlärnings- och undervisningsprocesser. Detta gagnar utan tvekan verksamheten i våra skolor. Vi får troligtvis också en livligare debatt. Visserligen debatteras skolan mycket, men det är alltför sällan som man diskuterar fundamentala inlärnings- och undervisningsfrågor.

För att lärare i sin skolvardag skall kunna både följa med aktuell forskning och bedriva forskning är det nödvändigt med tid för detta. Utan det ekonomiska stöd vi har fått både från Gudrun Malmers stiftelse och Skolverket hade vi knappast kunnat genomföra den här undersökningen. Den nedsättning i våra tjänster som detta möjliggjorde har varit av avgörande betydelse.

Det är också viktigt med stöd och förståelse från skolledningen. I vårt fall tycker vi att vi har haft det. Vi har i andra sammanhang sett hur oförståelse eller ibland t.o.m. ovilja hos närmsta chef har försvårat för lärare att genomföra undersökningar i matematikdidaktik (Grevholm & Wennström, 1999).

Vi vill understryka att vi inte ser något motsatsförhållande mellan akademisk forskning och forskande lärare. Skall vi utveckla skolan till gagn för eleverna behövs båda. De kompletterar varandra. Men det är viktigt att lärarnas kunskap synliggörs mer än vad fallet är i dag både för deras egen utveckling och för forskningen.

Sammanfattning och slutsatser

Det är ganska naturligt att vi i den här avslutande rapporten ger en sammanfattning av hela undersökningen och inte bara det material som presenterats i den här rapporten. Att vi baserar våra slutsatser på allt material från tre års studier med bl. a. tester, enkäter, observationer osv. vid olika tidpunkter ökar reliabiliteten hos undersökningen. De slutsatser vi har dragit i våra tidigare rapporter har till stor del stärkts av det material som samlats in under elevernas sista gymnasieår.

Man kan, som vi konstaterat tidigare, inte definiera någon minsta nivå på förkunskaperna vid gymnasiestarten för att lyckas med algebran och matematiken. Även en elev med ett dåligt utgångsläge kan lyckas om hon/han är motiverad och får visst stöd på den nivå hon/han är. Både lärare och elev måste tro att det är möjligt att klara av matematiken. Därför är det viktigt att skapa situationer, där eleven kan lyckas och även om det blir fel måste läraren försöka lyfta fram det positiva i elevens försök.

Detta gäller självfallet inte enbart elever med dåligt utgångsläge utan alla elever. Vi har nog alltför ofta i matematikundervisningen underskattat de affektiva faktorernas betydelse. Motivation och självförtroende är oerhört viktigt om man skall lyckas. I detta sammanhang är tidsfaktorn mycket viktig. Om man – vilket ofta är fallet i matematik – på grund av alltför ambitiösa kurser tvingas gå fram för fort, blir många elever stressade och deras inlärning försämras. De hinner inte smälta stoffet, vilket medför att både motivation och självförtroende undergrävs. Risken är stor att de tappar lusten för matematik. Som vi framhållit i den här rapporten tror vi att detta drabbat en del elever i åk 2 och 3. Därför bör nog alla som sysslar med matematikutbildning ställa sig frågan om man inte bättre skulle kunna anpassa kursomfång till den disponibla tiden. Kanske mer kvalitet än kvantitet skulle ge bättre resultat i längden.

Vi anser att vår undersökning ger stöd för uppfattningen att gymnasieskolan kan klara nästan all förenklingsalgebra. Ofta börjar man med förenklingar för tidigt utan att eleverna har någon riktig förståelse för vad bokstäver står för och vad ett algebraiskt uttryck är (jfr. sid. 8). Man går också fram för fort. I grundskolan bör eleverna få viss förståelse för variabelbegreppet och lära sig använda bokstäver i olika sammanhang (t.ex. enkla formler och ekvationer) gärna med hjälp av laborativt material. I det här sammanhanget vill vi understryka prealgebrans betydelse och att algebrainlärning är en lång process.

Betydelsen av god talförståelse - även av negativa och rationella tal - kan inte nog betonas för att lyckas med algebran. Utan ordentlig talförståelse blir mycket av förenklingsalgebran obegriplig och eleven kommer hela tiden att göra fel. Om det finns brister i grundläggande talförståelse, måste dessa repareras, innan det blir meningsfullt att systematiskt träna förenklingar. Om man i matematikundervisningen – vilket sker alltför ofta - skyndar vidare utan att ha försäkrat sig om att eleverna har de nödvändiga förkunskaperna blir resultatet dåligt. Ett exempel på detta är förenklingar av rationella uttryck. Området behandlades i början av NV2 och med den korta tid som stod till förfogande hann vi inte reparera bristerna i bråkräkning. Därför blev, vilket framgår av flera test, behållningen av avsnittet liten för de flesta elever.

Vi har sett exempel på att en liten detalj t.ex. en missuppfattning av hur man hanterar negativa tal, kan försvåra algebraiska förenklingar. Eleven gör hela tiden fel. När missuppfattningen klarats upp fungerar förenklingarna bra. Detta påverkar både elevens självförtroende och motivation positivt. Inlärningen sker språngvis och när ett hinder har övervunnits, gör eleven väsentliga framsteg. Därför är det mycket viktigt att man ordentligt analyserar elevens fel och verkligen finner grundorsaken till varför eleven gör fel. Gör man inte det är risken stor att man inte sätter in rätt åtgärder. Beror felet på t.ex. bristande talförståelse och man enbart ger eleven mer träning i att förenkla algebraiska uttryck så befäster man troligtvis elevens felaktiga föreställningar. Träningen blir destruktiv.

De algebrakunskaper som är stabila är de eleverna har med sig från NV1. Testet både i slutet av NV2 och NV3 visar att i de flesta fall klarar eleverna enkel förenklingsalgebra med hantering av binom och polynom och tillhörande ekvationer. I början av gymnasieskolan hade merparten av eleverna stora brister på dessa områden, men under första gymnasieåret uppnådde de flesta en rimlig färdighet i denna del av algebran. Däremot har eleverna inga stabila kunskaper i hanteringen av rationella uttryck. Som vi framhållit tidigare beror detta på att eleverna hade dåliga förkunskaper i att hantera rationella tal. Avsnittet var därför ganska meningslöst för de flesta.

På frågan om hur datorer och räknare skall påverka innehållet i algebraundervisningen har vi inga slutgiltiga svar. Det finnas anledning att fundera över vilka manuella färdigheter eleverna skall behärska och hur säkra de skall vara. Är det t.ex. väsentligt att eleverna manuellt kan lösa ekvationen $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$. Ändrar vi ekvationen till $x+\frac{1}{x^2}=\frac{5}{2}$ så kan de inte lösa den manuellt. Däremot kan båda ekvationerna enkelt lösas med samma metod (t.ex. skärningen mellan två kurvor) på en grafritande räknare. En metod som kan användas på en mängd olika ekvationer.

Ny teknik förändrar hela tiden vilkoren för verksamheten och det finns en risk att vi av tradition anser viss kunskap som oundgänglig, även om så inte är fallet. Med algebran är det nog så att vi i dag bör förskjuta perspektivet från omskrivning till översättning. Räknare och datorer klarar alla de omskrivningar, som ingår i traditionella skolkurser i algebra. Däremot klarar de inte av att översätta från ett problem till ett algebraiskt uttryck. Vi bör definitivt ha en ständigt pågående debatt om vad som är viktig matematisk kunskap och varför. Troligtvis bör vi också i vår undervisning ta hänsyn till att behoven är olika för dem som har matematik som huvudintresse och för dem som är intresserade av matematikens tillämpningar inom naturvetenskap och teknik (se t.ex. Andersson, 2000). Viss manuell algebraisk förmåga är troligtvis fortfarande nödvändig – men vilken och hur kommer synen på detta att förändras med tiden.

> *For those who look to the structure and methods of mathematics as guides to school curricula, it is time for reconsideration of every assumption that underlies traditional curriculum structures. Of course, this fundamental change in mathematics wrought by emergence of electronic information-processing technology underscores another factor in curriculum design process – we plan curricula to prepare students for lives in a future world that will undoubtedly evolve through continual an rapid change. Our experience of the recent past suggests that we can hardly imagine what the future will hold, and this uncertainty itself must be a factor in the curriculum decision-making process*
> (Fey, 1994, sid. 18)

Slutligen vill vi upprepa vårt förslag från vår första rapport om ett ökat erfarenhetsutbyte om lärande och undervisning i matematik mellan lärare från olika skolformer från förskola till högskola. Vi menar då ett utbyte på lika villkor med respekt för respektive skolforms egenart och inte ett där det högre stadiet upprättar orealistiska "önskelistor". Eftersom alla är överens om att matematikinlärning är en lång process, är det nödvändigt att vi - för att höja kvalitén på matematikutbildningen i landet - samverkar mer. Formerna för detta kan diskuteras, men NCM borde kunna ha en central roll i detta sammanhang.

Avslutningsvis sammanfattar vi de viktigaste slutsatserna i punktform.

- Man kan inte definiera någon minsta nivå på förkunskaper för att lyckas med algebran. De viktigaste faktorerna för att klara upp ett dåligt utgångsläge är att man (både elev och lärare) tror det skall gå och att man får visst stöd (på den nivå man är).

- God förståelse för variabelbegreppet och användningen av bokstäver samt god talförståelse är viktiga förkunskaper – viktigare än att kunna omforma algebraiska uttryck.

- Motivation och självförtroende är mycket viktigt om man skall lyckas med algebran.

- Ofta sker algebrainlärningen språngvis. Det finns trösklar man skall passera.

- Det är mycket viktigt att noga analysera elevernas fel. Om t.ex. felen vid algebraiska förenklingar beror på dålig förståelse av negativa tal är det meningslöst att öva mer på förenklingar – det kan t.o.m. vara skadligt. Elevens problem med negativa tal måste lösas innan man kan gå vidare.

Referenser

Andersson, M. (2000). Nya former för matematikstudier. *Nämnaren 27, nr 4.* s. 52 - 57

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* NämnarenTEMA. Kungälv: NCM, Göteborgs Universitet.

Blomhöj, M. (1997). Funktionsbegrebet og 9. klasse elevers begrepsforståelse. *Nomad 5, nr 1*. s. 7 – 31

Booth, L. R. (1989). The Research Agenda in Algebra: A Mathematics Education Perspective. I Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* National Council of Teachers of Mathematics

Crawford, K. & Adler, J. (1996). Teachers as researchers in mathematics education. I A. Bishop et al (Eds.) *International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Ekenstam, A. & Greger, K. (1987) On children's understanding of elementary algebra. *Journal of Structural Learning 9,* 303-315

Fey, J. T. (1994). Eclectic Approaches to Elementarization. I R. Biehler et al (Eds) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Dordrecht: Kluwer

Filloy, E. & Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning algebra. I A. Bishop et al (Eds.) *International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Grevholm, B. (1998) Vi skriver y=x+5. Vad betyder det? Rapport presenterad vid *Minikonferens* om matematikdidaktik i Sundsvall, 1998.

Grevholm, B. (2001). Läraren som forskare i matematikdidaktik. I B. Grevholm (Red.). *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv.* Lund: Studentlitteratur

Grevholm, B. & Wennström, T. (1998) Samverkan Högskola - Skola. *Nämnaren 25, nr 3.* s. 30 - 31

Grevholm, B. & Wennström, T. (1999) Samverkan Högskola – Skola II. *Nämnaren 26, nr 4.* s. 36 - 39

Högskoleverket (1999). Räcker kunskaperna i matematik ? Rapport

Johansson, B. (1998). *Förkunskapsproblem i matematik ?.* Rapport inst f. ämnesdidaktik, Göteborgs universitet

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Kücheman, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics: 11-16.* London: John Murray

Persson, P. & Wennström, T. (1999). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000a). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse II.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000b). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse III.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, P. & Wennström, T. (2000c). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse IV.* Rapport Högskolan Kristianstad.

Vygotsky, L. S. (1986). *Thought and Language*. Cambridge: The MIT Press

Wagner, S. & Kieran, C. (1989). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* National Council of Teachers of Mathematics

Wennström, T. (2001). Kan gymnasieläraren välja? *Nämnaren 28, nr 1.* s. 30 - 31

Wheeler, D. (1989). Contexts for Research on the Teaching and Learning of Algebra. I Wagner, S. & Kieran, C. (Eds.). *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra.* National Council of Teachers of Mathematics

Wheeler, D. (1996). Rough or Smooth? The transition from Arithmetic to Algebra in Problem solving. I Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (Eds.). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer

Bilaga 1.
Sluttest i algebra för NV3

Hjälpmedel: *inga*

Del 1. *Endast svar. Svara på provbladet.*

2. Lös ekvationerna nedan

   a) $4x - 15 = 75 – x$ ....

   b) $\frac{x}{5} - 6 = 14$ ....

   c) $x^x + 3 = 7$ ....

   d) $(x – 3)(2x + 1) = 0$

   ....

3. Förenkla uttrycken

   a) $3(4 - 3x) + 4(3 – 4x)$

   ....

   b) $3(4 + 3x) - 4(3 – 4x)$

   ....

   c) $(2x - 5)(3x + 4)$

   ....

   d) $\frac{2x^2 - 8}{x - 2}$ ....

5. Vad kan man säga om c om c+d=10 och c<d ?

   ....

6. Vilket är störst 2n eller n + 2.? Förklara!

   ....

7. På en skola finns det 9 gånger så många elever som lärare. Ställ upp en formel mellan antalet elever E och antalet lärare L.

   ....

* *	* * *	* * * *	* * * * *
	* * *	* * * *	* * * * *
		* * * *	* * * * *
			* * * * *
fig.1	fig.2	fig.3	fig.4

8. Hur många stjärnor finns i

   a) fig. 5 ? ....

   b) fig. 100 ? ....

   c) fig. n ? ....

9. Av en ståltråd med längden 12 cm klipps biten x cm av. Av biten med längden x bildas en cirkel och av den andra biten en kvadrat.

   a) Bestäm cirkelns radie uttryckt i x.

   ....

   b) Bestäm kvadratens sida uttryckt i x.

   ....

10. Äpplen kostar a kr/st och päron b kr/st. Förklara vad uttrycket 3a + 5b betyder.

   ....

   ....

***Del 2**. Lösning lämnas. Skriv på provbladet. Behöver du mer plats använd rutat papper.*

9. Lös ekvationerna nedan

a) $2x^2 + x - 3 = 0$

b) $4(x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 39$

c) $\dfrac{3}{x-2} = \dfrac{2}{3}$

Bilaga 2.
Matematikenkät för NV3

Den här enkäten är en uppföljning av den du gjorde i åk1 och åk2. Avsikten är att kartlägga elevers inlärning i framför allt algebra. Genom att vi får bättre kunskap om detta hoppas vi kunna förbättra matematikundervisningen.

I alla rapporter och andra sammanhang där studien presenteras kommer namnen att plockas bort och ersättas med anonyma beteckningar.

Namn:______________________________ Klass: ________ Läser Ma E ? ja nej

1. **Vad tycker du om matematik nu, när du strax skall sluta skolan? Förklara t.ex. i termer som roligt - tråkigt, lätt - svårt osv. Förklara gärna varför du tycker som du gör.**

2. Hur har du upplevt gymnasieskolans matematikundervisning ? Vad har varit bra ? Vad har varit dåligt ? Förbättringsförslag ?