HÖGSKOLAN
KRISTIANSTAD

Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse

Per-Eskil Persson & Tomas Wennström
Klippans Gymnasieskola 1999

Innehållsförteckning

Förord

Detta är den första i en serie av rapporter, som skall presentera resultaten från en pågående undersökning av gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse. Denna undersökning startade höstterminen 1998 vid Klippans Gymnasieskola och den grupp som studeras är de elever som då började på naturvetenskapsprogrammet i Klippan. Eftersom detta är de första elever som följt Lpo 94 är det extra intressant att kartlägga deras algebraiska kunskaper och hur dessa utvecklas.

Denna rapport kommer huvudsakligen att beskriva kunskapsläget, då eleverna påbörjade sina gymnasiestudier. I kommande rapporter kommer vi att studera vad som händer med ett antal elever under första året i gymnasieskolan och situationen i början av åk 2. Om vi får möjlighet kommer vi också att i slutet av åk 3 undersöka vilka algebraiska kunskaper eleverna har med sig från gymnasietiden.

Dessa studier har möjliggjorts dels genom ett generöst bidrag från Gudrun Malmers Stiftelse dels genom anslag från Skolverket. De ingår som en del i ett projekt i matematikdidaktik, som i samarbete med Högskolan Kristianstad pågår i Klippans kommun. Vi vill slutligen framföra ett stort tack till universitetslektor Barbro Grevholm, Högskolan Kristianstad för mycket hjälp, uppmuntran och konstruktiv kritik under arbetets gång.

Bakgrund

Hösten 1997 utbröt en våldsam diskussion om studenternas dåliga förkunskaper i matematik. Under läsåret 1997/98 kom också larmrapporter från övergången mellan grundskola och gymnasieskola. Ofta följde debatten ett gammalt välkänt mönster. Högskolan klagar på gymnasieskolan som klagar på grundskolan...Denna typ av debatt leder självfallet inte till någon konstruktiv dialog (Johansson, 1998).

Samtidigt som denna debatt pågick publicerades TIMSS som visade att svenska elever klarade sig bra i internationell jämförelse (Skolverket, 1998). Stor försiktighet skall dock iakttagas både, när man drar slutsatser från internationella studier och högskolans diagnostiska test (Brandell, 1998). En sak som emellertid klart framgår av TIMSS är att svenska gymnasister är bra på att tillämpa matematik men sämre på bl.a. algebra. Detta stämmer också väl med TIMSS resultat för 13-åringar, som visar att svenska elever är dåliga på algebra och geometri (Skolverket, 1996). Högskolan klagar på sämre algebraisk förmåga hos nybörjarna och många gymnasielärare anser att förkunskaperna i bl.a. algebra och bråkräkning har försämrats under ett antal år. Bland många högstadielärare är uppfattningen i dag att algebran är gymnasieskolans ansvar.

> *Andra orsaker som nämns är försämrade förkunskaper från grundskolan i bl.a. algebra och bråkräkning. Trots tydliga siffror som pekar i denna riktning (se t.ex. Johannsson, 1998a) och att t.ex. algebra behandlas ett par år senare i svensk skola än i många jämförbara länder, vill många högstadielärare flytta sådana kunskapsområden ännu längre upp i skolsystemet.* (Johansson, 1998 sid. 12)

Om man - som en del påstår (Bergsten et al, 1997 sid. 7) - i den nya kursplanen för grundskolan Lpo 94 verkligen stärker algebran kan diskuteras. Visserligen skriver man i kommentar till grundskolans kursplan:

> *I algebra har svenska elever presterat sämre än jämförbara länder. Alltfler behöver kunna tolka t.ex. formler och algebraiska samband. Algebra är inte längre något som skall studeras enbart av de som går vidare på matematikintensiva gymnasieprogram. Det har visat sig viktigt att söka förenkla övergången och se likheter och skillnader mellan att räkna med tal och med bokstäver.* (Skolverket, 1997, sid. 26)

> *Svenska grundskoleelevers kunskaper i algebra har visat sig bristfälliga vid internationella jämförelser. Många elever på gymnasielinjer har problem med förståelse av och färdigheter i transformationer, förenklingar och tillämpningar av formler och uttryck. Det har också visat sig att matematikundervisningen i Sverige förbereder övergången från att arbeta med tal till att arbeta med bokstäver senare än i andra länder. Det är viktigt att försöka få en mjukare mer meningsfull övergång till symbolspråk. Intresse och förståelse för matematik kan stimuleras i arbete med mönster.* (Skolverket, 1997, sid. 29)

I mål att sträva mot finns mycket från traditionell skolalgebra

- *grundläggande algebraiska begrepp, uttryck, formler, transformationer, ekvationer, olikheter och system av ekvationer som verktyg vid problemlösning och vid beskrivningar av olika fenomen.*

- *grundläggande egenskaper hos viktiga funktioner och motsvarande grafer.*

Men i mål att uppnå finner man inte mycket algebra

- *kunna ställa upp och använda enkla formler och ekvationer vid problemlösning.*

- *kunna tolka och använda grafer till funktioner som beskriver verkliga förhållanden och händelser.*
  (se t.ex. Bergsten et al 1997, sid. 156-157)

Vid diskussioner med högstadielärare framförs ofta numer den åsikten att gymnasieskolan inte längre kan förvänta sig att alla elever har mött algebra på högstadiet (förf. muntlig kommunikation med högstadielärare). Att den traditionella skolalgebran, som man tidigare behandlade i särskild kurs i praktiken numer håller på att bli gymnasieskolans ansvar är ganska klart. I de förslag till nya kursplaner i matematik för gymnasiet som håller på att utarbetas (Grevholm, 1999), lyfts algebran fram mer än i den gällande (se t.ex. Bergsten et al 1997, sid. 160-161). Om denna utveckling är bra eller dålig kan endast klarläggas genom studier av hur dagens gymnasieelever utvecklar sin algebraiska kompetens. Att det samtidigt måste finnas en progression i algebraundervisningen där grundskolan tar ansvar för prealgebran och den inledande algebran är klart.

> *Algebraundervisningen kan i stället placeras in som ett stråk genom hela grundskolans och gymnasiets matematik från prealgebran, då algebraiska symboler ännu inte används, via inledande algebra med algebraiska bokstavssymboler till algebra, då de används fullt ut i problemlösning och som bas för ny kunskap*. (Bergsten et al, 1997, sid. 25)

Problem med bristfälliga kunskaper i algebra är inte något isolerat svenskt fenomen utan är väl dokumenterat i internationell litteratur. Mycket forskning om algebrainlärningen har också gjorts (se t.ex. Kieran, 1992 och Bednarz, 1996).

> *Many studies have shown the difficulties of students at several school levels with respect to the concepts focused on in the various ways of introducing algebra: equation solving, the manipulation of algebraic expressions, problem solving and the handling of fundamental concepts such as that of variable.* (Bednarz, 1996, sid. 3)

> *The difficulties associated with the transition from arithmetic to algebra seem to occur whatever type of algebra curriculum is being followed; that is, whether or not algebra is viewed as a natural development of arithmetic from the early years or whether it is viewed as a separate course for older students*. (Filloy, 1996, sid. 146)

Eftersom det är ett välkänt faktum att goda kunskaper i algebra har stor betydelse för hur elever lyckas med matematikstudierna både i gymnasiet och på högskolan, är det av stort intresse att undersöka vilka algebrakunskaper eleverna har med sig från grundskolan och hur de kan utveckla dessa kunskaper under gymnasietiden. Man kan nog med fog påstå att algebran är nyckeln till framgång i matematikstudierna och att de flesta studiemisslyckanden på högskolenivå kan ledas tillbaka till brister i den algebraiska förmågan. Detta är inte så konstigt eftersom det algebraiska språket är ett standardverktyg i matematik och matematikutbildning. (jfr. Bergsten et al, 1997 sid. 152). De erfarenheter vi hittills haft i Klippan från kursgymnasiet visar att de elever som får svårigheter med högre kurser i matematik (Matematik C, D och E) är de som misslyckas med att tillgodogöra sig den algebra, som ingår i Matematik A och B.

När vi i höstas (1998) fick de första NV-eleverna som följt Lpo 94 i grundskolan, föll det sig därför - med tanke på den debatt som pågick - ganska naturligt att påbörja en studie av hur förmågan och förståelsen i algebra utvecklas under gymnasietiden. Av speciellt intresse är då det första året i gymnasieskolan, eftersom det är då det mesta av algebrastoffet behandlas.

I viss mån vill vi också anknyta dels till en pågående undersökning av lärarkandidater med inriktning mot matematik och naturvetenskap för årskurs 4 - 9 vid Högskolan i Kristianstad (Grevholm, in press), dels en studie Morten Blomhöj gjort med danska niondeklassare (Blomhöj, 1997). Båda undersökningarna försöker kartlägga och analysera begreppsförståelsen hos elever - något vi också försöker göra i våra studier.

Plan för projektet

Studien har nu pågått ett läsår. Avsikten är att följa de elever som började på NV-programmet hösten 1998 och undersöka hur deras algebraiska förmåga och förståelse utvecklas under gymnasietiden. Vid skolstarten testades samtliga elevers förkunskaper i algebra. De fick också fylla i en enkät. I denna del av undersökningen deltog samtliga elever i NV1 ca 100 st. I författarnas egna klasser (50-60 elever) har sedan noggrannare studier gjorts. Så har t.ex. ett antal elever intervjuats på band. Under året har eleverna sedan fått göra ett antal test och prov. På så sätt har utvecklingen under året kunnat följas.

Tanken är att proceduren med test, enkäter och intervjuer skall upprepas i början av höstterminen i åk 2. Vi hoppas genom detta kunna kartlägga vad som har hänt med den algebraiska förmågan och förståelsen under det första året i gymnasieskolan. Av intresse är också att undersöka hur detta påverkar attityden till matematik. Det finns nämligen skäl att tro att elevens syn på algebran bestämmer inställningen till matematik.

> *Många elever ser algebran som svårtillgänglig. Om man inte lyckas kan man tappa intresset och få en negativ inställning till hela matematikämnet.*
> (Bergsten et al, 1997, sid.152)

De tester och prov som eleverna i författarnas klasser gör, sparas. Detta ger möjlighet att mer i detalj studera hur eleverna utvecklats under sitt första år på gymnasiet. En sådan undersökning planerar vi att göra för ett antal elever - i första hand de vi har intervjuat. Om tiden medger kommer vi också att detaljstudera de elever som lyckats mindre väl med sina algebrastudier. Dessutom kommer en översikt av hur gruppen som helhet förändrats att göras.

Vi hoppas kunna följa upp dessa undersökningar med någon form av kartläggning av vilka algebrakunskaper eleverna får med sig från gymnasiet. Tidpunkten för detta skulle vara någon gång under vårterminen i åk. 3.

Problem och frågeställningar

Det är således väl klarlagt (se ovan) att det finns problem med kunskaperna i algebra. Trots en hel del forskning på området är det mycket vi inte vet om inlärningsprocessen. Ett problem i sammanhanget är också att forskningsrön har svårt att nå ut i klassrumsvardagen (se Kieran, 1992, sid. 413). Här skulle mycket kunna vinnas på ett ökat samarbete mellan skola och högskola (Grevholm & Wennström, 1998).

I den här rapporten menar vi med algebra den traditionella skolalgebran, som till innehållet i stort sett varit oförändrad de senaste 100 åren. Om man jämför dagens gymnasieläroböcker med gårdagens, känner man faktiskt igen sig ganska väl - kanske alltför väl (se t.ex. Olson, 1939 och Sjöstedt, 1956). Det skall också noteras att för 50-60 år sedan var det inte många tonåringar, som överhuvudtaget började på gymnasiet. Andelen nybörjare var t.ex. 1940 5,8 % (Marklund, 1984, sid. 35).

Typiska områden i detta sammanhang är ekvationer av första och andra graden, enkla ekvationssystem, förenklingar av polynom och rationella uttryck, enkla funktioner och deras grafer (se Kieran, 1992, sid. 391). Även om vi i årskurs 1 av naturliga skäl kommit att arbeta mycket med omskrivningar, är vår uppfattning att hela den algebraiska cykeln med faserna *översättning*, *omskrivning* och *tolkning* är lika viktig (se Bergsten et al, 1997, sid. 15-16).

En diskussion som förts under ett antal år är i vilken utsträckning eleverna behöver manuella färdigheter i algebra. Med relativt billiga symbolhanterande miniräknare och datorprogram som Mathematica, Maple och Derive hävdar en del att det i skolan skulle vara onödigt att lära sig algebraisk symbolhantering. Tiden skulle i stället kunna användas till begreppsförståelse och problemlösning. Även om man naturligtvis kan diskutera omfattningen på den manuella färdighetsträningen är vår uppfattning - som vi tror delas av många - att sådan behövs. Förhållandet mellan färdighet och förståelse är komplicerat. Hur färdighetsträningen påverkar förståelsen är inte på något sätt klarlagt av forskningen.

> *In other words, it is not obvious how the use of symbol manipulators in the early stages of learning algebra can help students develop a structural conception of algebraic expressions. This is a question for future research.* (Kieran, 1992, sid.414)

> *The availability of symbol manipulators on relatively cheap calculators is also causing requestioning of the purpose of school algebra. Perhaps our awareness of what aspects of 'algebra' a computer can do will help us to understand what aspects of 'algebra' a computer cannot perform. We may come to realise that effective symbol manipulation as a part of mathematical problem solving has always been more than the mechanistic manipulation which it has often been criticised as being.* (Filloy, 1996, sid. 157)

Ett annat skäl för att eleverna måste träna manuella färdigheter är högskolans krav. I allmänhet tillåter högskolorna inga hjälpmedel under de inledande matematikstudierna. Gymnasieskolan måste därför - för att minska "kulturkrocken" - utveckla elevernas manuella förmåga. Vikten av manuella färdigheter understryks också av en del nationella prov. Således har t.ex. det nationella provet för Matematik E sedan några terminer delats upp i två delar - en del där man inte får använda räknare och en där detta är ett tillåtet hjälpmedel.

En frågeställning som intresserar oss är vilka förkunskaper en elev som börjar på NV måste ha för att lyckas med sina matematikstudier i gymnasieskolan. Med lyckas menar vi i detta sammanhang att minst uppnå ett klart godkänt resultat på de olika matematikkurserna. Vilka förkunskaper är absolut oundgängliga för att en elev - med rimlig arbetsinsats - skall kunna uppnå en acceptabel färdighet i algebra ? Vad kan gymnasieskolans algebraundervisning bygga på ? Vad är en acceptabel algebraisk färdighet om man skall lyckas med matematiken på NV-programmet ? Det kanske t.ex. inte gör så mycket att en elev har dåliga förkunskaper i att förenkla algebraiska uttryck om hon/han har en god förståelse för bokstävernas och likhetstecknets betydelse. Andra faktorer som kan spela stor roll vid förståelsen av algebraiska förenklingar är god talförståelse speciellt vad gäller negativa tal. Den intressanta frågan är om och i så fall hur vi - utgående från varje elevs individuella förutsättningar - kan ge en god algebraisk kompetens. För sådan behövs om man skall lyckas med sina matematikstudier.

En nödvändig förutsättning för vår undersökning är således en ordentlig kartläggning av vilka kunskaper eleverna har då de börjar sina gymnasiestudier. I vårt upptagningsområde kommer eleverna från en 4-5 olika kommuner i nordvästra Skåne och vår undersökning omfattar ca 100 elever. Därför bör vi kunna få en någorlunda representativ bild av de förkunskaper en nybliven gymnasieelev har.

Andra frågeställningar av intresse är om det finns några speciella hinder som försvårar inlärningen av algebra. Är t.ex. algebrainlärning något som sker språngvis så att när man övervunnit ett visst hinder gör man väsentliga framsteg ? Vissa observationer vi gjort under läsåret 1998/99 tyder på att så kan vara fallet, men för närvarande vågar vi inte dra några bestämda slutsatser. En noggrannare analys av det material vi samlat in kommer förhoppningsvis att ge något svar.

En fråga av vikt under gymnasietiden är vad som måste göras för att bibehålla den algebraiska kompetensen. Hur mycket repetition behövs för att behålla och stärka uppnådd färdighet ? En annan intressant frågeställning är vad som skiljer den elev som lyckas med algebra och den som misslyckas. Kan vi få en uppfattning om detta kan vi kanske bättre hjälpa de elever som har mest problem med algebran.

Som nämnts ovan hoppas vi också kunna få möjlighet att undersöka vilka algebraiska kunskaper eleverna har med sig från gymnasieskolan. I och för sig mäter kanske högskolans test det. Men dels kommer endast en del av gymnasieeleverna att fortsätta med matematikstudier vid högskola, dels kan viss kritik riktas mot både tidpunkten för högskolans test - efter ett längre eller kortare uppehåll i matematikstudierna - och innehållet, som kanske inte alltid speglar gymnasieskolans kursinnehåll.

Metod

Ett väsentligt inslag i vår undersökning är att vi kommer att göra en longitudinell studie. Vi kommer - förhoppningsvis - att kunna följa eleverna under hela gymnasietiden och därigenom få en god inblick i deras utveckling. Genom att vi har var sin klass kommer vi att kunna följa verksamheten i stort sett dag för dag. Att själv vara en av aktörerna i inlärningsprocessen har många fördelar, men självfallet finns det också problem med detta. En observatör utifrån skulle notera en hel del saker som vi missar genom att vi deltar i skeendet. Vi anser ändå att möjligheten till kontinuerliga observationer uppväger dessa nackdelar.

I vår studie använder vi oss både av kvantitativa och kvalitativa metoder. För att samla in data använder vi flera olika sätt:

- eleverna utsätts för ett antal tester och enkäter som sparas.

- ett antal prov och andra skriftliga elevarbeten sparas.
- ett antal elever intervjuas på band.
- egna observationer av elevernas arbete.
- elevernas utvärderingar.
- diskussioner med eleverna.
- diskussioner och möten med lärare från både gymnasieskolan och andra stadier.

En svårighet vid en sådan här undersökning är att man snabbt får väldigt mycket material att strukturera och analysera. Man måste komprimera rådata för att få ett överblickbart material och då finns risk att man sorterar bort något väsentligt eller tolkar sina data fel. Emellertid är detta nödvändigt om man överhuvudtaget skall kunna dra några slutsatser. Eftersom man hela tiden har tillgång till det ursprungliga materialet kan man alltid gå tillbaka till detta vid behov.

Ett speciellt problem vid en undersökning av det här slaget är begreppsförståelse. En förmåga t.ex. att multiplicera binom korrekt kan man mäta med någorlunda säkerhet, även om det naturligtvis finns både definitionsproblem och mätfel också här. Förståelse är mycket mer problematiskt. Vad menar vi med förståelse för det första ? Det är inte något väldefinierat begrepp och hur mäter vi det ? När man från en enkät och/eller intervju skall försöka avgöra om en person förstått något eller inte, hamnar man ofta i besvärliga bedömningssituationer. Det enda man kan göra då är att efter bästa förmåga försöka dra rimliga slutsatser från materialet och vara medveten om risken för feltolkningar. För att öka säkerheten i tveksamma fall kan man också låta en annan person bedöma materialet.

Resultat

För att kartlägga elevernas kunskaper och attityder, då de började i gymnasieskolan, har vi använt oss av test och enkäter. Dessa har kompletterats med bandade intervjuer och observationer av eleverna. De sistnämnda är inte minst viktiga för att få en allsidig bild av kunskapsläget. För att få överskådlighet i ett ganska stort material och inte drunkna i detaljer försöker vi lyfta fram det vi funnit karakteristiskt och mest intressant. Detta innebär naturligtvis en viss subjektivitet, men är nödvändigt för att få ett användbart material.

Test vid skolstarten

Under höstterminens första veckor fick eleverna göra tre olika förkunskapstest - i numerisk räkning, geometri och algebra. I det här sammanhanget är endast algebratestet av intresse. Detta återfinns i bil.1 och i bil.2 finns en resultatsammanställning.

Tabell 1

Poäng	Andel
0 - 5	0%
5 - 10	2%
10 - 15	3%
15 - 20	4%
20 - 25	9%
25 - 30	30%
30 - 35	33%
35 - 40	19%
	100%

Totalt 105 elever testades på 40 olika uppgifter omfattande ekvationslösning, uppställning av algebraiska uttryck, algebraiska förenklingar, användning av formler (bl.a. insättning av uttryck) och linjär funktion. Testet gjordes utan räknare och varje rätt svar gav 1 poäng.

Om vi tittar till totalresultatet (se Tabell 1) finner vi att det finns en grupp elever (ca 20%) med mycket goda förkunskaper och en ungefär lika stor grupp med dåliga förkunskaper (< 25 poäng). Detta stämmer ganska väl med våra iakttagelser under läsåret. Ca en fjärdedel av eleverna har haft väldigt dåliga förkunskaper i algebra och en del av dessa elever har - enligt egen utsago - nästan inte alls sysslat med algebra i grundskolan. Naturligtvis har första året på NV-programmet blivit väldigt jobbigt för dessa elever och om de lyckats uppnå en rimlig bestående algebraisk förmåga är det för tidigt att säga i dag. Vi hoppas höstens undersökningar i åk 2 skall ge svar på detta. Många av dessa elever - dock inte alla - har jobbat hårt för att förbättra sina kunskaper och de har också gjort framsteg.

De bästa eleverna (20-25 %) har - enligt vår bedömning - haft goda eller mycket goda kunskaper från grundskolan. Detta stämmer väl med testresultatet ovan. Dessa elever har också lyckats bra med matematikstudierna i NV1.

Mellangruppen - de som fick mellan 25 och 35 poäng på testet (ca 60% av eleverna) - har haft blandade förkunskaper med en del brister och luckor. De har i de flesta fall uppnått hyfsade resultat på både Matematik A och B. En del har t.o.m. lyckats väldigt bra.

Ser vi till de olika områden som testats har, som framgår av uppgift 1a-f, nästan alla elever kunskaper i ekvationslösning *(lösningsfrekvens inom parentes*). Med tanke på lösningsfrekvensen på uppgift 1g och 3ab verkar dock i en del fall en djupare förståelse för vad en ekvation är saknas.

1. Lös ekvationerna nedan
   a) x + 25 = 55 (90%)
   b) x - 25 = 55 (95%)
   c) 5x = 45 (96%)
   d) x/5 = 8 (96%)
   e) 4x - 15 = 75 (71%)
   f) $\frac{x}{5} + 6 = 14$ (81%)
   g) 2^x -1 = 7 (51%)

3. Vilket av talen nedan är en lösning till ekvationen
   5 10 15 20 25
   a) 4x + 30 = 80 - x (83%)
   b) 5x - 10 = 130 - 2x (81%)

Uppgift 7a-d illustrerar ganska väl förmågan att ställa upp ett algebraiskt uttryck. I enklare fall klarar de flesta elever detta, men 7cd visar att många elever är osäkra.

7. Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger
   a) låda B (87%)
   b) låda C (87%)
   c) låda A + låda B (förenkla svaret) (60%)
   d) alla tre lådorna (förenkla svaret) (59%)

Som framgår av uppgift 6a-f är förmågan att sätta in i ett uttryck relativt god. De lägre lösningsfrekvenserna på 6ef beror nog mer på brister i numerisk förmåga än i algebra.

6. Beräkna uttryckets värde om x = 20
   a) 5x + 25 (93%)
   b) 500 - 10x (95%)
   c) $x^2 + 50$ (83%)
   d) $x^2 + 10x$ (80%)
   e) $2x^2$ (65%)
   f) $(x + 10)^2$ (53%)

Den uppgiftstyp som har klart sämst resultat är algebraiska förenklingar (uppg.5a-g). Här är många elever osäkra. 5ef visar att många har problem med tecken och parenteser. Endast de bästa eleverna klarar av att multiplicera binom. Resultaten från testet stämmer väl med våra iakttagelser.

5. Förenkla uttrycken

a) 4x - x	(84%)
b) 8x + 15 + 4x - 5	(83%)
c) a - 3a + 2a	(54%)
d) y + 3(4 + 3y) + 8	(60%)
e) 10x + 3(4 - 3x) + 8	(54%)
f) 10x - 3(4 - 3x) - 8	(42%)
g) (2x - 5)(3x + 4)	(19%)

Sammanfattningsvis kan konstateras att många elever har hyfsade kunskaper om ekvationer och insättning i uttryck. De har också viss kunskap om uppställning av algebraiska uttryck. Däremot är de flesta - med undantag för de allra bästa eleverna - mycket osäkra på algebraiska förenklingar då de börjar i gymnasieskolan. Gruppen med sämst förkunskaper kommer att beskrivas mer i detalj nedan (se sid. 15). I övrigt hänvisas till bil. 1 och 2.

Enkäter och intervjuer

I början av höstterminen fick eleverna besvara en enkät (se bil.3). Totalt har 82 elever svarat och av dessa är 33 flickor och 49 pojkar. I en av våra kollegers klass blev bortfallet tyvärr lite väl stort, men i författarnas egna klasser har samtliga elever svarat. Med en genomsnittlig svarsfrekvens på ca 80% bör man i alla fall få en tillförlitlig bild av årskursen.

Enkäterna har kompletterats med bandade intervjuer av totalt ett tjugotal elever. I det här sammanhanget använder vi intervjuerna främst för att ytterligare belysa enkätsvaren. I en kommande studie skall vi mer i detalj beskriva hur de intervjuade eleverna utvecklats under sitt första år i gymnasieskolan.

För att göra materialet från enkäter och intervjuer användbart har det varit nödvändigt att sammanfatta och komprimera detta. Syftet är att få fram vad som är karakteristiskt för ett antal elever, men samtidigt vill vi belysa intressanta svar som avviker från gängse ståndpunkter. Huvudmålet i denna rapport är att beskriva gruppen som helhet och inte enstaka individer. Enkäten kommer att gås igenom fråga för fråga. Materialet kommer huvudsakligen att beskrivas kvalitativt. Någon detaljerad statistik av olika svarsalternativ är varken rimlig eller intressant i detta sammanhang.

1. Vad är matematik ? Förklara kortfattat med egna ord.

För de flesta elever är matematik att räkna. Även svar som tar upp andra aspekter innehåller i allmänhet något som har med räkna att göra. Några exempel på svar

Matematik är läran om att lära sig räkna. (flicka)

Läran om siffror, logik och problemlösning. (flicka)

Det är när man löser problem och gör beräkningar av olika slag. (pojke)

Matematiken kan ge svar på många hemliga saker här i livet. När jag skriver matematik så räknar jag till viss del in fysik, kemi och teknik. Logiken i matten är något som fångat mitt intresse. (pojke)

2. Vad tycker du om matematik ? Förklara t.ex. i termer som roligt - tråkigt, lätt - svårt osv. Om du har ändrat inställning till matematiken i grundskolan förklara när och varför du gjort det.

Här är det i bland lite svårt att klassificera olika svar. Om man t.ex. skall tolka ett svar som entydigt positivt eller mer neutralt är i bland tveksamt. Ofta beror det på att en del elever och då speciellt flickorna uttrycker sig mera nyanserat. Många elever (7 flickor och 26 pojkar) uttrycker i alla fall ganska klart att de tycker matematik är roligt.

Jag tycker att matte är absolut ett av de roligaste ämnena i skolan. Det kan vara svårt i bland men det är bara kul. Matte har varit mitt favoritämne sedan grundskolan. (pojke)

Jag tycker att det är roligt med matte och man får en "kick" när man får nya utmaningar, som man nu fick på gymnasiet. Visst det kan vara svårt i bland och det blir tråkigt när det är för lätt. (flicka)

Många neutrala svar (23 flickor och 17 pojkar) uttrycker ofta en positiv inställning till ämnet men med vissa förbehåll.

Ganska svårt ämne. Men roligt när man förstår det och då mycket lättare. (flicka)

Det är roligt när man lyckas och förstår. Mindre roligt när man inte hänger med. Jag tycker matte nu är bättre eftersom man går fortare fram. Tragglar inte samma saker hela tiden. (flicka)

När man fattar och det går lätt att räkna ut då är det roligt. Men om det kör i hop sig är det tråkigt. Man blir glad när man känner att man fattar. (pojke)

Roligt när det går bra annars jättetråkigt. (pojke)

Roligt om man kan. Man känner sig klokare. (flicka)

Den här bilden stämmer väl med gammal lärarerfarenhet. Om matematik är roligt eller ej beror mycket på hur man lyckas. Även bland NV-elever är det en del, som tycker matematik är tråkigt. Trots detta har de valt ett matematikintensivt program. En flicka uttrycker sig så här vid intervjun (sammanfattning av förf.).

Matematik är att räkna. Tycker matematik är tråkigt och har alltid gjort så. Har valt NV för att det är bra när man inte riktigt vet vad man vill bli.

I bland kan skälen till att man tycker att matematik är tråkigt mana till eftertanke. Om pojken nedan bedömt sin situation riktigt vet vi inte, men hur han upplevt den framgår ganska klart.

Var roligt när jag var liten, men blev tråkigt efter mellanstadiet för jag hade redan gjort högstadieböckerna på mellanstadiet. Min lärare på högstadiet tillät inte mig att lära mig nya saker och att gå in på gymnasiematte. Därför tröttnade jag på matte när jag inte lärde mig något nytt.

3. *Vad är algebra?*

De flesta meningsfulla svar uttrycker på ett eller annat sätt att algebra är bokstavsräkning. (ca 2/3 av alla svar). Övriga svar uttrycker dålig förståelse för vad algebra är. Om detta beror på att man inte sysslat med algebra, har glömt vad det var eller har sysslat med algebra utan att veta att det var algebra framgår inte av enkäten. Det är väl också en relativt ointressant frågeställning. Det väsentliga resultatet är, att ca 1/3 av eleverna har oklara föreställningar om vad algebra är. Det är också troligt att det är bland denna grupp elever, som man har sämst algebraisk förmåga. Nedan följer några exempel på enkätsvar.

Algebra är när man räknar med okända tal och ger dem en bokstav som beteckning t.ex. x o y. Man använder sedan talet i t.ex. en ekvation då man kan få fram hur stort talet är. (flicka)

Räkning av uppgifter som innehåller bokstäver. (pojke)

Det är väl ekvationer och sådant. (pojke)

Jag har aldrig haft algebra så jag vet ej. (flicka)

4. *Vad tycker du om algebra ? Förklara gärna varför du tycker som du gör.*

Ca 1/3 av eleverna uttrycker att algebra är roligt. En del tycker det är det roligaste i matematiken bl.a. för att det varit en utmaning. Andelen elever som tycker att algebra är tråkigt eller svårt är nästan 1/3. Troligtvis är det de, som haft dåliga förkunskaper i algebra. I vår fortsatta analys kommer vi att försöka undersöka detta noggrannare. En annan intressant fråga är om inställningen till algebra har ändrats under det första gymnasieåret och hur detta beror på förmågan. Några exempel på enkätsvar.

Algebra är det roligaste i matematiken. (pojke)

Det är roligt, men lite svårt för att det är nytt och annorlunda. (flicka)

Algebra är det svåraste sättet att tänka för att det är tråkigt. (pojke)

Jag tycker algebra är svårt. Jag har inte räknat det så mycket och har svårt att förstå hur man skall räkna ut det. Jag kan det inte än. Allt är ganska rörigt och svårt att förstå och komma i håg. (flicka)

Jag ser faktiskt ingen som helst praktisk nytta av det. Jag har aldrig stött på det ute i vanliga livet och kommer nog aldrig att göra det hellre. (pojke)

5. *Förklara i ord hur man löser ekvationen $4x + 35 = 95 - x$. Tänk dig att du skall hjälpa en kamrat som inte kan lösa ekvationer.*

Här har vi bara klassificerat metoden. Om den har använts korrekt eller ej har inte noterats. Hur pass bra förklaringarna varit tas inte hellre upp i detta sammanhang. Frågan är av större intresse, då man skall studera utvecklingen hos enskilda elever. Har deras förmåga att uttrycka sig matematiskt förbättrats under det första året i gymnasieskolan ? På enkäten vi skall ge eleverna i höst kommer vi att ha en liknande fråga för att kunna göra jämförelser.

Den vanligaste metoden för att lösa ekvationer är att "göra samma på båda sidor likhetstecknet". Nästan hälften av alla elever väljer denna metod. Relativt många ca 25 % använder metoden "flytta över och ändra tecken". Lösning med prövning och inspektionsmetod väljs av några elever. Nästan 20 % ger inget eller klart obegripliga svar. Enligt vår mening är det positivt att de flesta elever använder metoden att "göra samma på båda sidor likhetstecknet". Det är en mer generell metod än de andra och dessutom är den lättare att förstå än t.ex."flytta över och ändrar tecken". (jfr. Kieran, 1992, sid.400)

6. Vi skriver y = x + 5. Vad menar man med det ? Hur hänger t.ex. x och y i hop ? Förklara gärna på mer än ett sätt.

Ca. 3/4 av svaren var av typen y är lika med x+5, y är 5 mer än x eller x är 5 mindre än y. I inget fall har någon elev svarat att x är större än y. Det skall jämföras med Blomhöjs undersökning av danska niondeklassare, där 1/3 av svaren var att x är 5 mer än y och majoriteten av eleverna faktiskt tolkar likheten y=x+5 fel (Blomhöj, 1997). Intressant nog ger de flesta av våra elever samma svar, som majoriteten av de lärarkandidater Grevholm undersökt (Grevholm, in press). Detta skulle kunna tyda på att begreppsförståelsen i detta sammanhang är relativt konstant och inte förändras speciellt mycket under gymnasietiden. Det bör dock i detta sammanhang påpekas att elevgrupperna i de olika undersökningarna inte är jämförbara. T.ex. har vi med ett urval av hela NV-populationen medan de bättre NV-eleverna saknas bland lärarkandidaterna.

Elevernas förmåga att uttrycka sig matematiskt varierar mycket och i en del fall kan man vara osäker om de verkligen förstått hur x och y hänger ihop.

y representerar ett tal. x representerar ett annat. y är lika mycket som x+5 är.(flicka)

x är y-5. y är x+5 . (pojke)

x+5 är formeln för att få fram y. (pojke)

Då pojken som skrivit den sista meningen ovan intervjuades och vi diskuterade y=x+5 sa han att han fattar ingenting och att han aldrig sysslat med det. Men när han får exemplet y=2x+3 och x=3, då tar han och beräknar 2·3+3. Dialogen nedan visar att han har viss förståelse även om den är osäker och oklar.

I. Kan du ge något exempel på hur man kan räkna ut y med den formeln (y=x+5) ?
E. Man skall ta så man skall räkna ut vad x är ?
I. Man skall räkna ut vad y är ! Vad måste man veta då ?
E. Då tar man y-5 för att få fram x.
I. Ja, men om du vet vad x är
E. Men jag vet ju inte vad x är !!
I. Kan du hitta på något värde på x och tala om vad y skulle bli ?
E. x+5 blir y.
I. Ja, det är rätt. Om du tar ett bestämt värde på x.
E. Ungefär 5 då.
I. Vad blir y då ?
E. 10.

I andra fall känner man sig övertygad om att eleven har en riktig uppfattning av vad y=x+5 betyder.

y är hela tiden 5 mer än x. x är hela tiden 5 mindre än y. (pojke)

Man menar att det obekanta y är lika med 5 plus något annat obekant. (flicka)

y är fem mer än x. Om x är 10, är y 15. (flicka)

Få elever (10 st) lämnade inget svar eller ett svar som var obegripligt. Även om man inte besvarade frågan på enkäten, har man kanske en rimlig uppfattning av vad y=x+5 betyder.

Vid intervjun utspann sig dialogen nedan med en flicka som ej besvarat frågan på enkäten och nog förstår hon hur x och y hänger ihop.

I. Kan du säga hur x och y hänger i hop.
E. De är inte lika stora.
I. Det är rätt.. Blir y mindre än x ?
E. y är större.
I. Kan du säga hur mycket större y är än x ?
I. Om du tar och hittar på något värde på x
E. 2
I. Vad blir y då ?
E. 7.

Anmärkningsvärt är att väldigt få elever kopplar $y=x+5$ till koordinatsystem, grafer och värdetabeller, trots att man sysslat med det i grundskolan. Vid intervjuerna behövdes faktiskt ganska "ledande" frågor för att få in eleverna på grafer och dylikt. Liknande resultat har Grevholm kommit fram till vid sina undersökningar av lärarkandidater. Kanske skall vi i gymnasieskolan betona den bildmässiga aspekten av funktioner mer än vi gör ?

Det bör också i detta sammanhang noteras att endast några få elever nämner ordet funktion t.ex.

y får ett värde beroende på vad x är, dvs. x är en funktion av y. (flicka)

Observationer

Med förkunskapstesterna (se sid.9) som stöd tog respektive lärare ut några elever i sin klass, som ansågs behöva extra hjälp i årskurs 1. Dessa delades in i två grupper med c:a 10 elever i varje och dessa fick 1 timmes extra undervisning per vecka. Grupperna var inte statiska under året, utan det tillkom eller avgick elever ur dem, beroende på utgången av fortlöpande test och prov under de ordinarie lektionstillfällena.

I dessa grupper gjordes en del enskilda observationer av de svårigheter elever har med bemästrandet av algebran. Det var speciellt intressant att studera denna - i förhållande till övriga NV-elever - något mer matematiksvaga grupp, eftersom man kunde förvänta sig att upptäcka mer grundläggande problem med förståelsen hos dem. Avsikten var också att prova ut metoder att diagnosticera varje elevs individuella svårigheter för att sedan bättre kunna hjälpa denna att klara av eventuella ”trösklar” i sin algebraiska utveckling.

Naturligtvis har observationer också gjorts i de ordinarie undervisningsgrupperna. Det är få elever, som inledningsvis inte uppvisar åtminstone någon brist i den algebraiska förståelse, man behöver som grund för att kunna klara NV-programmets matematikstudier.

Vad är det då för typer av svårigheter man kan urskilja? Det finns naturligtvis många sätt att klassificera problemen, men här har valts följande huvudtyper:

- *Eleven har brister i sina aritmetiska färdigheter*
- *Den matematiska abstraktionsnivån är inte tillräckligt hög*
- *Det logiska tänkandet har inte utvecklats och tränats*

Under dessa huvudtyper sorterar sedan ett antal undertyper av problem. Några av dem återges nedan med exempel på observationer, som gjorts av enskilda elevers lösningsförsök. Det bör påpekas att det inte är en uttömmande beskrivning, utan ska ses som just exempel.

Aritmetiska färdigheter

Under denna punkt sorterar en mängd olika missuppfattningar, förståelseproblem och luckor i kunskaper och färdigheter vad det gäller behandling av vanliga tal i olika former. Här är några exempel :

1. *Prioritetsregler för räknesätten.*

$4+3x$	Eleven räknar här addition före multiplikation och får felaktigt: 7x.
$3x^2$	Detta blir plötsligt samma som $3x \cdot 3x = 9x^2$ dvs. multiplikation kommer före potens.

2. *Parentesers betydelse och ”osynliga” parenteser.*

$3x + 2 \cdot (x+5)$	Eleven misstolkar det som en binommultiplikation och börjar multiplicera 3x med x osv.
$(4x+1)(2x-5)$	Omvänt problem. Eleven adderar rakt av: 4x och 2x blir 6x, 1 minus 5 blir –4, alltså: $6x-4$.
$\frac{10x-15}{5}$	Eleven ser 15 delat med 5 sist och ger svaret: $10x-3$.
$\frac{4x+9}{2x+3}$	4x delat med 2x blir ju 2 och 9/3 blir 3, så alltihop blir $2+3=5$.

3. *Bråktal och bråkräkning.*

$\frac{3x}{5}$	Vad står det egentligen för? Många elever visar stora brister i bråkräknefärdigheter, så det hjälper föga med ”översättningen” till $\frac{3}{5}x$. 3:an och 5:an ses ofta var för sig ocheleven

vet inte riktigt hur de ska kombineras med x.

$\frac{x}{2}+x$	Eleven kan inte tolka första termen som $\frac{1}{2}x$, utan försöker t.ex. att addera de båda x:en först.
$\frac{2x}{3}=6$	Eleven har kanske lärt sig att man ska multiplicera båda sidor med något, och sedan dividera. Men svaret kan lika gärna

	bli 4 som 9.
$\frac{x}{5} = \frac{4}{3}$	Man ska multiplicera med 5 på båda sidor, men var kommer 5:an in i högerledet? Svaret blir ofta 4/15.

4. *Negativa tal och minustecknets betydelse.*

$-5x - 3x$	Eleven ger lätt felsvaret $-2x$. Här står ju egentligen minustecknet i två olika betydelser, först som markör av negativa talet –5, och sedan som räknesättet subtraktion Eleven har sällan diskuterat skillnaden (som ju dyker upp på deras grafräknare!).
$3x - (-2x)$	Att subtraktion med $-2x$ blir detsamma som addition med 2x kan vara ett mysterium för eleven Detta är ingen lätt sak att ta till sig (t.o.m. Euler lär ha haft problem med detta).
$-3x = 24$	Eleven dividerar med 3 och får $-x = 8$, men har svårt att inse att det är detsamma som x = -8.

Matematiska abstraktionsnivån

Här finns problem, som uppstått genom att inte översta nivån nåtts av de fem hierarkiskt ordnade nivåerna av elevuppfattningar, som beskrivs t.ex. i Algebra för alla.

Nivå 1: Bokstaven ses som ett objekt som saknar mening, eller dess värde fås som bokstavens plats i alfabetet.

Nivå 2: Det är tillräckligt att pröva med ***ett*** *tal istället för bokstaven.*

Nivå 3: Det är nödvändigt att pröva med flera tal.

Nivå 4: Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Det räcker att pröva med något av dessa tal.

Nivå 5: Man uppfattar bokstaven som representant för en klass av tal. Man behöver inte pröva med något av dessa tal. (Bergsten et al, 1997, sid. 19)

Även de brister i de olika faserna av den algebraiska cykeln, som visar sig som svårigheter att översätta och tolka uttryck med symboler, är med (Bergsten et al, 1997, sid. 15), samt sambandet mellan symboler.

1. *Uppfattning av bokstavssymboler.*

$x + 7$	Eleven har svårt att se x som en representant för en klass av tal (nivå 5 i hierarkin). x kan ges betydelsen av något bestämt tal istället, t.ex. 1 (nivå 2). ”Förenklingen” ger då 8 som svar.
5x	Hur hänger 5:an och x ihop? Många tycker det är konstigt att det

	finns ett osynligt multiplikationstecken. Det kan ställa till med problem för eleven om denna tänker för mycket på det. För hur blir då förenklingen: $5x + 3x$? Multiplikation?
$9x - 5x$	Om eleven subtraherar bit för bit i termerna, kommer även x att subtraheras bort och felsvaret blir 4. Eleven har inte lärt sig att uppfatta x som en ”enhet” som man kan ha i olika antal.
$3x - x$	Att x är samma som 1x bottnar i samma brist på ”enhetstänkande” som ovan.
$3x + 4y + 7x + 3y$	Eleven har svårt att skilja ”äpplen” från ”päron”, och det kan rentav bli 17xy av förenklingen.
$5x = 35$	Eleven får svårigheter, som återigen beror på bristen i ”enhetstänkande” och vet inte vad som ska göras. Kanske blir det en subtraktion och svaret $x = 30$.

2. *Variabelbegreppet och samband mellan variabler, t.ex. funktioner.*

$y = x + 5$	Vad betyder egentligen detta samband? Vad står x resp. y för? Hur hänger de samman? Dessa frågor är mycket svåra att besvara för en stor andel av eleverna (jfr. sid.14).

3. *Översättning till och från uttryck med symboler, t.ex.*

Karin är 3 år äldre än Johan. Tillsammans är de 19 år. Vilken ålder har Karin och Johan?

För att ekvationer och förenklingar ska kunna användas vid problemlösning, krävs att eleven klarar av att koppla samman texten i problemet som ställts med uttryck, där algebraiska symboler används. Det handlar också om en beslutsprocess i vilken eleven först måste besluta sig för att en algebraisk metod ska användas, sedan vilka symboler som ska användas och till sist utföra översättningen korrekt. På samtliga dessa punkter visas ofta stor tveksamhet, inte minst på den första. Att ”fly” från algebran och försöka andra metoder är den första tanken hos många. Man skulle kunna tolka det som en rädsla för algebra, men det handlar genomgående om att förtroendet för den egna förmågan brister.

Logiska tänkandet

Här finns de problem, som sammanhänger med den logiska strukturen i olika matematiska uppställningar, t.ex. ekvationer. Betydelsen av de olika jämförelsetecknen, främst likhetstecknet, har inte framgått klart för eleven. Många gånger avslöjas missuppfattningarna genom det sätt som ekvationslösningen utförs.

Ibland förloras helt enkelt ekvationen ur sikte och förvandlas till en ”förenkling”, t.ex.

$$4x + 7 = 19$$
$$4x + 7 – 19 =$$
$$4x - 12$$

Vanligt är att likhetstecknet används i betydelsen ”blir”, ”utför” eller ”Enter”. Här finns användningen av miniräknaren med i bilden. Lösningarna avspeglar de olika räknemomenten på räknaren.

$$4x + 7 = 19$$
$$19 - 7 = 12$$
$$\frac{12}{4} = 3$$

eller alternativet $4x + 7 = 19 - 7 = \frac{12}{4} = 3$.

I båda dessa fall fås det korrekta svaret 3, eftersom eleven har vetat vilka aritmetiska beräkningar, som måste göras. Men ekvationens logiska karaktär med två led, som med likhetstecknet balanseras mot varandra, är helt borta. I sista exemplet reflekterar eleven inte över att likhetstecknet bryts hela vägen. Inte sällan kan man få se en horisontell lösning, i vilken likhetstecknets två betydelser ”blir” och ”är lika med” varvats.

$$4x + 7 = 19 \quad = \quad 4x = 19 - 7 \quad = \quad 4x = 12 \quad = \quad x = \frac{12}{4} = 3$$

Även här blir svaret rätt och eleven har egentligen utfört de olika stegen i ekvationslösningen korrekt. Ändå är det logiskt helt oacceptabelt.

Att svaret på de elementära ekvationerna för det mesta blivit rätt har gjort att eleven trott att hennes/hans metod varit helt rätt, och på så sätt har de felaktiga lösningsmetoderna förstärkts. När då svårighetsgraden höjs bara ett litet steg med ekvationer som t.ex. $73 = 13 - 5x$ eller $5x - 7 = 2x + 8$, kan misslyckandet bli totalt. Plötsligt blir allt fel och eleven förstår inte varför. Slutsatsen kan i värsta fall bli, att hon/han helt enkelt tror sig vara obegåvad i algebra och ekvationslösning och inte går vidare med matematikkurserna.

Sammanfattning och slutsatser

Huvudsyftet med den här rapporten har varit att beskriva förkunskaperna i algebra hos nybörjare på NV-programmet vid Klippans gymnasieskola. Eftersom våra studier pågår är det för tidigt att dra alltför långtgående slutsatser om algebrainlärningen i gymnasieskolan. Om resultaten kan generaliseras till svenska gymnasieelever i allmänhet är också osäkert. Våra elever kommer från ett antal olika grundskolor i mindre kommuner. Om situationen är likartad i t.ex. storstadskommuner vet vi inte.

Enligt vår preliminära bedömning har ca 3/4 acceptabla förkunskaper i algebra. Det innebär att de bör klara A och B-kurserna i matematik med tillfredsställande resultat. Prognosen för att de skall klara matematikstudierna på NV-programmet är då god.

Den bästa fjärdedelen har t.o.m. mycket goda förkunskaper och har redan i grundskolan stött på mycket av det algebrastoff som behandlas i Matematik A och B. I debatten, som brukar koncentrera sig på kunskapsbrister, glöms oftast denna grupp bort. Att så är fallet beror kanske på att den inte ger några större problem. Möjligen lägger vi för lite tid och kraft på att utveckla dessa elevers kunskaper.

Ungefär en fjärdedel av våra nybörjare i NV1 har mindre goda förkunskaper i algebra. Om de trots detta - på den tid som står till förfogande med rimlig arbetsinsats - kan uppnå en acceptabel kunskapsnivå är en av de frågor vi försöker besvara. Vi tror det kan vara möjligt, men fortsatta undersökningar får visa om så är fallet. I det här sammanhanget kan det finnas skäl att påpeka att även i den "gamla" skolan fanns det kunskapsproblem.

> *De s.k. ”högre skolornas” roll som urvals- och examensskolor gav dem en egen problemflora. För eleverna och deras föräldrar men också för lärare och skolledare var kvarsittning och utkuggning ett ständigt problem. Ännu på 1940-talet nådde normalt bara tre av fyra elever fram till examen. Och av dessa tre hade bara två gått rakt igenom skolan utan tidsförlust.* (Marklund, 1984, sid. 20)

Så här i början av vår undersökning kan vi inte dra några mer djupgående slutsatser Vi hoppas i våra fortsatta studier få svar på en del av de frågor vi ställt och under arbetets gång kommer säkert nya frågeställningar att dyka upp. Den centrala frågan för oss är vad vi kan göra för att på bästa sätt utveckla den algebraiska förmågan och förståelsen under gymnasietiden. Närmast planerar vi att mer i detalj studera utvecklingen hos de elever vi intervjuat. Vi kommer också att i början av höstterminen 1999 kartlägga kunskapsläget i NV2 för elevgruppen.

Eftersom vår undersökning delvis inspirerats av problem med stadieövergångar vill vi till sist rekommendera en åtgärd vi tror skulle underlätta övergången grundskola-gymnasieskola och gymnasieskola-högskola nämligen ett ökat erfarenhetsutbyte i matematikdidaktik mellan lärare från de olika skolformerna. Vi menar då ett utbyte på lika villkor och inte ett där det högre stadiet upprättar orealistiska "önskelistor". Eftersom alla är överens om att matematikinlärning är en lång process, är det nödvändigt att vi - för att höja kvalitén på matematikutbildningen i landet - samverkar mer. Det kunde t.ex. ske i form av seminarier med deltagare från grundskola-gymnasieskola-högskola. Frågor att diskutera i detta sammanhang kunde t.ex. vara vad som är möjligt och önskvärt att uppnå på olika stadier och vem som skall ta ansvar för vad.

Referenser:

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. Nämnaren Tema, Göteborgs Universitet.

Blomhöj, M. (1997). Funktionsbegrebet og 9. klasse elevers begrepsforståelse. *Nomad 5, nr 1*. s. 7 - 31

Brandell, G & Wallin, H (1998). Från elit till massutbildning. *Nämnaren 25, nr 2*. s. 2 - 5

Filloy, E. & Sutherland, R. (1996). Designing curricula for teaching and learning algebra. I A. Bishop et al (Eds.) *International handbook of mathematics education.* Dordrecht: Kluwer.

Grevholm, B. (in press). Vi skriver y=x+5. Vad betyder det? I C.Bergsten & B. Johansson (Red.) *Rapport från Minikonferens om matematikdidaktik i Sundsvall, 1998.*

Grevholm, B. & Wennström, T. (1998) Samverkan Högskola - Skola. *Nämnaren 25, nr 3.* s. 30 - 31

Grevholm, B. (1999). *Förslag till kursplan i matematik*. Arbetsmaterial, version *7*

Högskoleverket (1999). *Räcker kunskaperna i matematik ?* Rapport

Johansson, B. (1998) *Förkunskapsproblem i matematik ?.* Rapport inst f. ämnesdidaktik, Göteborgs universitet

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. I D.A. Grouws (Ed.) *Handbook of research on mathematics teaching and learning.* New York: Macmillan.

Marklund, S. (1984). *Skolan för och nu*. Stockholm, Liber utbildningsförlaget.

Olson, H. (1939). *Algebra för latingymnasiet*, Första delen. Stockholm. Svenska bokförlaget

Sjöstedt, C.E. (1956). *Algebra för gymnasiet I R för reallinjen*. Lund: Geerups.

Skolverket (1996). *TIMSS. En undersökning av svenska 13 - åringars kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv*. Skolverkets rapport 114

Skolverket (1997*). Kommentarer till grundskolans kursplan och betygskriterier i matematik*

Skolverket (1998*). TIMSS. Kunskaper i matematik och naturvetenskap hos svenska elever i gymnasieskolans avgångsklasser*. Skolverkets rapport 145

Bilaga 1.
Diagnostiskt test i algebra för åk 1

Du får inte använda räknare, men du får naturligtvis göra räkningar på kladdpapper. Testet skall hjälpa oss att lägga upp dina matematikstudier på bästa sätt. Skriv svar på bladet..

1. Lös ekvationerna nedan

   a) x + 25 = 55 ....

   b) x - 25 = 55 ....

   c) 5x = 45 ....

   d) x/5 = 8 ....

   e) 4x - 15 = 75 ....

   f) $\frac{x}{5} + 6 = 14$ ....

   g) 2^x -1 = 7 ....

2. Hitta på två olika ekvationer som har lösningen x = 10.

   ....

   ....

3. Vilket av talen nedan är en lösning till ekvationen.

   5 10 15 20 25

   a) 4x + 30 = 80 - x

   ....

   b) 5x - 10 = 130 - 2x

   ....

4. Vilket eller vilka skrivsätt nedan anger alltid ett tal som är.

   k + 5 k + 2 2k k + k
   0,5k $\frac{k}{2}$ $\frac{k}{5}$ 5k

   a) dubbelt så stort som k

   ....

   b) hälften så stort som k

   ....

   c) 5 gånger så stort som k

   ....

   d) 2 mer än k

   ....

5. Förenkla uttrycken

   a) 4x - x....................................

   b) 8x + 15 + 4x - 5...................

   c) a - 3a + 2a..........................

   d) y + 3(4 + 3y) + 8 ....

   e) 10x + 3(4 - 3x) + 8

   ....

   f) 10x - 3(4 - 3x) - 8

   ....

   g) (2x - 5)(3x + 4)

....

6. Beräkna uttryckets värde om x = 20

a) $5x + 25$..............................

b) $500 - 10x$..........................

c) $x^2 + 50$..............................

d) $x^2 + 10x$.............................

e) $2x^2$...................................

f) $(x + 10)^2$ ....

7. Låda A väger a kg, låda B väger 50 kg mer än låda A och låda C väger 3 gånger så mycket som låda A. Hur mycket väger

a) låda B ....

b) låda C ....

c) låda A + låda B (förenkla svaret)

....

d) alla tre lådorna (förenkla svaret)

....

8. Kostnaden y kr för en tidningsannons beräknas så här:
$y = 50 + 10x$, där bokstaven x betecknar antalet rader i annonsen.

a) Hur mycket kostar 10 rader ?

....

b) Hur många rader får man för 200 kr ?

....

9. *   ***   *****   ***** **
fig 1   fig 2   fig 3   fig 4

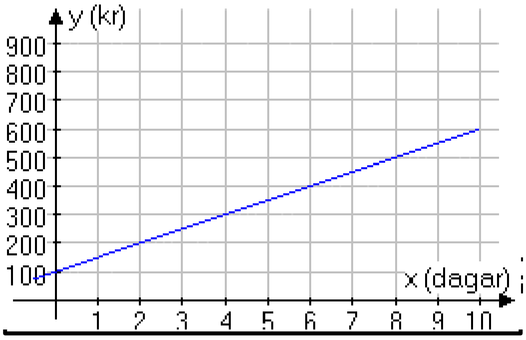
a) Hur många stjärnor har fig 10 ?

....

b) Hur många stjärnor har fig n ?

....

10. Diagrammet visar sambandet mellan kostnaden och antalet dagar då man hyr en cykel.



a) Vad kostar det att hyra en cykel i sex dagar ?

....

b) Hur många dagar kan man hyra en cykel för 300 kr ?

....

c) Vad är grundavgiften ?

....

d) Skriv en formel för linjen.

....

Namn:___________________________

Bilaga 2.
Preliminär sammanställning algebratest i NV1 september 98

I testet deltog 105 elever i NV1.

Poängfördelning i klasserna och hela årskursen (max 40 poäng)

Poäng/Klass	NV1a	NV1b	NV1c	NV1d	totalt
0 - 5	0%	0%	0%	0%	0%
5 - 10	0%	0%	8%	0%	2%
10 - 15	4%	0%	4%	3%	3%
15 - 20	4%	12%	0%	0%	4%
20 - 25	0%	8%	13%	14%	9%
25 - 30	38%	31%	17%	34%	30%
30 - 35	31%	27%	50%	28%	33%
35 - 40	23%	23%	8%	21%	19%
	100%	100%	100%	100%	100%

Lösningsfrekvens

Uppgift	1a	b	c	d	e	f	g	2a	b	3a	b
Lösningsfrekvens	90%	95%	96%	96%	71%	81%	51%	90%	87%	83%	81%
Uppgift	4a	b	c	d	5a	b	c	d	e	f	g
Lösningsfrekvens	60%	62%	98%	93%	84%	83%	54%	60%	54%	42%	19%
Uppgift	6a	b	c	d	e	f	7a	b	c	d	8a
Lösningsfrekvens	93%	95%	83%	80%	65%	53%	87%	87%	60%	59%	86%
Uppgift	b	9a	b	10a	b	c	d				
Lösningsfrekvens	80%	86%	34%	99%	99%	90%	51%				

Uppgiftstyper

Område som testas	i uppgift	Totala antalet uppgifter på området
Ekvationslösning	1,2,3	10
Förmåga att ställa upp ett algebraiskt uttryck	4,7,9,10d	11
Algebraiska förenklingar	5	7
Användning av formler	6,8	8
Linjär funktion	10	4

Bilaga 3.
Matematikenkät för NV1

Det har visat sig att goda kunskaper i algebra har stor betydelse för hur man lyckas med matematikstudier både i gymnasiet och vid högskolan. Frågorna i denna enkät ställs som ett led i ett forskningsprojekt, som på sikt har till syfte att förbättra matematikundervisningen i framför allt algebra. Tanken är att vi skall följa ett antal elever vid Klippans Gymnasieskola under tre års gymnasiestudier och försöka kartlägga hur deras förståelse och förmåga i algebra förändras under denna tid. Denna enkät kommer för en del elever att följas upp med en intervju. För att vi skall kunna följa enskilda elever under tre år behöver vi namnet på den som besvarat enkäten. *I alla rapporter och andra sammanhang där studien presenteras kommer namnen att plockas bort och ersättas med anonyma beteckningar.*

Försök svara så tydligt och fullständigt du kan. Använd egna ord och kan du förklara något på flera sätt så gör det. Kan du inte förklara något allmänt försök i stället att ge ett exempel. Om du behöver mer plats använd baksidan.

Namn:__________________________________ **Klass:** __________

1. **Vad är matematik ? Förklara kortfattat med egna ord.**

2. **Vad tycker du om matematik ? Förklara t.ex. i termer som roligt - tråkigt, lätt - svårt osv. Om du har ändrat inställning till matematiken i grundskolan förklara när och varför du gjort det.**

3. Vad är algebra?

4. Vad tycker du om algebra ? Förklara gärna varför du tycker som du gör.

5. Förklara i ord hur man löser ekvationen 4x + 35 = 95 - x . Tänk dig att du skall hjälpa en kamrat som inte kan lösa ekvationer.

6. Vi skriver $y = x + 5$. Vad menar man med det ? Hur hänger t.ex. x och y i hop ? Förklara gärna på mer än ett sätt.