Examensarbete, Grundlärarexamen med inriktning mot arbete i grundskolans åk 4-6
15 hp, avancerad nivå
Ht 2017

Elevers möjligheter att lära bråk

Rebecka Bruér och Jenny Wiklund

Sektionen för lärande och miljö

Högskolan Kristianstad | www.hkr.se

Författare

Rebecka Bruér och Jenny Wiklund

Titel

Elevers möjligheter att lära bråk

Handledare

Kristina Juter

Examinator

Örjan Hansson

Sammanfattning

Syftet med studien är att undersöka hur elever i årskurs 6 uttrycker sina kunskaper om olika aspekter av bråk, jämförelser och division samt vilka resonemang och strategier de då använder. Syftet är även att undersöka vilka möjligheter eleverna upplever de fått att lära sig detta samt vilka möjligheter lärarna upplever att de har gett eleverna att lära sig, eftersom vi vill veta orsaker till att använda strategier valdes och vilka samband det kan finnas mellan elevers kunskaper om bråks olika aspekter och deras kunskaper om jämförelser och division med bråk. Studien är förankrad i teoretiska modeller om hur bråk kan förstås, teorier om lärande samt tidigare forskning med liknande frågeställningar. Det tillvägagångssätt som valts är flermetodsforskning som omfattar kvantitativ metod för insamling och analys av en skriftlig diagnos och kvalitativ metod för insamling och tematisk analys av intervjuer med elever och lärare. Resultatet visar att eleverna hade tillräckliga kunskaper totalt sett om bråks aspekter, jämförelser och divisioner men otillräckliga kunskaper om framför allt aspekten bråk som kvot vilket medförde otillräckliga kunskaper om innehållsdivision.

Ämnesord

Matematik, lärande, bråk, aspekt, kvot, förhållande, division.

Innehåll

Förord

Vi vill börja med att tacka vår handledare Kristina Juter som avsatt tid för oss vilket verkligen hjälpt oss framåt med vårt arbete. Tack vare henne har vi under hela processen haft en positiv inställning. Vi vill även tacka våra respektive familjer och vänner som ställt upp för oss, speciellt tack till Peter Stibe för tålamodet kring alla frågor om matematikens djup. Slutligen vill vi tacka de lärare och elever som ställt upp i vår undersökning. Utan er hade denna uppsats inte kunnat slutföras.

Vi har båda läst all litteratur och haft givande tankar sinsemellan. Författandet samt korrekturläsning av arbetet står vi tillsammans för.

1 Inledning

Internationella undersökningar såsom TIMSS (Skolverket, 2016b) av elevers kunskaper i matematik visar att svenska och grundskoleelever har bristande kunskap om bland annat aritmetik och taluppfattning. Detta menar också Löwing (2016) och Kilborn (2014), är ett stort problem. Dessa brister finns kvar hos många studenter som börjar lärarhögskolan (Karlsson, 2015) men även hos yrkesverksamma lärare (Roche & Clarke, 2013). Resultat av Jakobsen, Ribeiro och Mellone (2014), visar på vikten av att utveckla den kunskap hos norska lärarstudenter som medför att de förstår att tolka och begripa elevers lösningar.

Förståelse av matematiska begrepp utvecklas successivt från en mer konkret förförståelse till en mer utvecklad och generell förståelse menar Kilpatrick, Swafford och Findell (2001). Genom matematikundervisning ska elever ges tid och möjligheter att utveckla de förmågor som krävs för att förstå olika matematiska idéer. Förmågorna bör utvecklas på ett integrerat sätt där alla är lika viktiga. Att kunna lösa generella problem och då resonera om och kommunicera om olika begrepp kräver att samtliga förmågor har utvecklats. Vidare menar Kilpatrick el al. att en förutsättning för lärande är en tillåtande och trygg klassrumsmiljö där inga frågor är fel och vägen till målen är det viktiga.

Att lära utifrån ett sociokulturellt perspektiv innebär en social process där språket och andra redskap hjälper elever att förstå sin omgivning. Vygotskij menar enligt Säljö (2014) att för att kunna förstå omvärlden måste den uppfattas via ett medierande redskap där språket är det viktigaste. Utifrån Vygotskijs sociokulturella perspektiv sker lärandet genom kommunikation där läraren eller mer kompetenta kamrater utifrån kunskap om vad eleven redan kan, hjälper eleven att nå nästa steg på vägen mot målet genom att exempelvis ställa utmanande frågor (Säljö, 2014). I bedömning för lärande (formativ bedömning) blir då eleverna en viktig resurs för läraren enligt Lundahl (2011). För att förstå abstrakta begrepp i matematiken används redskap såsom ord, text, bild, olika föremål samt det matematiska språket i form av symboler (McIntosh, 2008). Genom problemlösning tillsammans med kamrater och lärare och då resonera om, motivera och förklara lösningar och tankar, utvecklas förmågan att förstå begrepp och metoder och att kunna kommunicera sina tankar (Kilpatrick et al., 2001).

Kunskaper om bråk är grundläggande för att förstå begrepp som andel, förhållande (proportion), skala, sannolikhet och algebra (Löwing, 2016; Kilborn, 2014). Det är därför viktigt att lärande om bråk inte tonas ner i undervisningen av skäl som att de inte förekommer i elevens vardag eller att lärare är osäkra på hur de ska undervisa om dem. Det finns i så fall en risk att elever förlorar intresset för matematik menar Kilborn. Det är ett stort steg för de flesta elever att gå från de hela talen till tal i bråkform, decimaltal och procent. Missuppfattningar om bråk uppstår på grund av komplexiteten hos bråk men också av generaliseringar om de hela talen och bristande förståelse av dessa (Kilpatrick et al., 2001; McIntosh, 2008). Bråk är erkänt svåra att lära eftersom de kan uttryckas och tolkas på så många olika sätt och att lärandet om dem enligt Kilpatrick et al. haft mer fokus på procedurer och algoritmer som kan läras utantill än på förståelse av begrepp. Förståelse av begrepp är centralt i studier av Kieren (1976), Behr och Post (1992), Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) och Löwing. För att få en djupare förståelse av bråk är det nödvändigt att ha erfarenheter av olika tolkningar (aspekter) av bråk såsom del av en helhet, mätning, kvot, operator och förhållande, som har intresserat bland andra Behr och Post, Kieren, Charalambous och Pitta-Pantazi att utveckla teorier och matematiska modeller om hur bråk kan förstås. Vi menar såsom blivande lärare att det är intressant att få kunskap om dessa och vilka kopplingar det kan finnas till teorier om lärande samt kursplanen i matematik (Skolverket, 2016a).

Undervisningen ska bygga på forskning och beprövad erfarenhet enligt skollagen (SFS 2010:800). Det finns omfattande forskning om hur bråk kan läras för att i tid förebygga missuppfattningar och svårigheter (Behr & Post, 1992; Kilpatrick et al., 2001; Roche & Clarke, 2013; McIntosh, 2008; Kilborn, 2014; Löwing, 2016). Vi finner det svårt att hitta forskning om vad och hur elever, som har undervisats enligt läroplanen Lgr 11 under hela sin skolgång, har lärt sig om bråk. Dessa elever har enligt kunskapskraven för årskurs 3 (Skolverket, 2016a) utvecklat kunskaper om att dela en helhet i lika delar samt begreppen dubbelt och hälften. Vi menar då att det är intressant att få kunskap om vilka aspekter av bråk som de getts möjligheter att lära i årskurserna 4 – 6, och hur detta lärande har gått till eftersom kursplanen i matematik (Skolverket, 2016a) ger utrymme för tolkning enligt Kilborn (2014).

1.1 Syfte

Syftet med föreliggande studie är att undersöka hur elever i årskurs 6 uttrycker sina kunskaper om olika aspekter av bråk, jämförelser och division samt vilka resonemang och strategier de då använder. Syftet är även att undersöka vilka möjligheter eleverna upplever de fått att utveckla sådan förståelse samt vilka möjligheter lärarna upplever att de har gett eleverna att utveckla sådan förståelse. Detta eftersom vill få kunskap om orsaker till att vissa strategier leder till korrekta lösningar och att andra till felaktiga sådana, men också vilka samband det kan finnas mellan elevers kunskaper om bråks olika aspekter och deras kunskaper om jämförelser och division med bråk.

1.2 Frågeställningar

a) På vilka sätt uttrycker elever i årskurs 6 sina kunskaper om olika aspekter av bråk, jämförelser och division? Vilka resonemang och strategier använder de samt vilka samband kan det finnas mellan deras kunskaper om bråks olika aspekter och deras kunskaper om jämförelser och division med bråk.
b) Vilka möjligheter upplever elever de fått att utveckla sin förståelse av bråks aspekter samt jämförelser och division med bråk?
c) Vilka möjligheter upplever lärare att de gett elever att utveckla förståelse av bråks aspekter samt jämförelser och divisioner med bråk?

I föreliggande studie behandlas enbart divisioner där antingen täljaren eller nämnaren är ett naturligt tal. Proportionaliteter behandlas ej.

1.3 Bakgrund

I Skolverkets kommentarmaterial till kursplanen i matematik (Skolverket, 2017) skrivs angående syfte att matematik är ett kreativt och kommunikativt ämne som kan användas i många olika sammanhang och ger elever tillfredsställelse när de kan lösa problem om dessa. Det är därför viktigt att de får möjligheter att arbeta med problemlösning och lära sig att redovisa sina lösningar på olika sätt, att förklara och motivera dem och att resonera om begrepp och metoder som de har förstått. De måste då ges möjligheter i undervisningen att utveckla sin tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika kontexter genom att arbeta i en miljö där svaret inte är det viktigaste utan vägen dit. Då vågar eleven att visa sin kunskap genom att uttrycka den på olika sätt, pröva olika metoder, bedöma rimlighet och argumentera för sina lösningar men också vara medveten om att kritik är utvecklande. Problemlösning förekommer i kursplanen för matematik, både som ett mål i sig som är uttryckt som problemlösningsförmåga och som ett medel att utveckla kommunikationsförmåga, begreppsförmåga, metodförmåga och resonemangsförmåga. I syftesdelen av läroplanen Lgr 11 (Skolverket, 2016a), definieras och förklaras ovanstående förmågor, som utgör det som eleven ska få möjlighet att utveckla i olika kontexter (det centrala innehållet). Förmågorna bedöms för varje delområde i centrala innehållet enligt kunskapskraven och slutligen skapas ett betyg som bestäms av den text och de värdeord som är utskrivna i kunskapskraven (Skolverket, 2016a). Kilborn (2014) menar att vikten av bråkbegreppet uttrycks i syftesdelen till kursplanen i matematik genom att eleven ska ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med matematiska begrepp. Han förklarar vidare att bråkbegreppet tonats ner i läroböcker för att troligtvis underlätta undervisningen för lägre presterande elever. Så att säga genom att övergå från bråk till decimaltal som exempelvis additionen $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$ till $0{,}67 + 0{,}25 = 0{,}92$. Följaktligen räddar detta situationen för stunden men leder till problem längre fram för eleverna enligt Kilborn. Alltså är det ett stort ansvar för lärare i grundskolan påpekar Kilborn - att ge elever de förkunskaperna för att exempelvis förstå kommande algebra i gymnasiet.

2 Teori och tidigare forskning

I detta kapitel redovisas den teori och tidigare forskning som utgör det ramverk som arbetet vilar på. I detta kapitel diskuteras skillnader och likheter mellan olika teorier samt resultat av tidigare forskning. Kapitlet beskriver och diskuterar teori om lärande i allmänhet, lärande om matematik, samt lärande om bråk. Därefter följer teori och diskussion om hur bråk kan förstås genom matematiska modeller av hur bråk kan konstrueras (bråks aspekter) och vilka relationer det enligt teori finns mellan förståelse av aspekter och förståelse av olika operationer med bråk.

2.1 Socialkonstruktivism

Konstruktivismen är en ledande teori om matematikinlärning där Jean Piagets tankar fått stor betydelse (Engström, 1998). Piaget menade enligt Säljö (2014) att det är den enskilda individen som själv konstruerar sin verklighetsbild utifrån sina egna erfarenheter och fäster stor vikt vid barns integritet och egna aktiviteter. Piagets teori gav en förståelse att barn är logiska och tänker avancerade tankar men behöver utvecklas i sin egen takt och utifrån vilka erfarenheter de gör när de själva upptäcker världen menar Säljö. Engström skriver om att det finns olika former av konstruktivism - där metaforen *konstruktion* är gemensamt för alla och beskriver den mentala förståelsen som utifrån existerande kunskaper utvecklas och omstruktureras anpassat till situationen. Den sociala konstruktivismen är en senare riktning inom konstruktivismen som omfattar flera versioner. Skillnaderna ligger i om inriktningarna är sociala eller individualistiska och framförallt om de har sitt ursprung i piagetiansk eller samhällsorienterad teori. Engström förklarar vidare att socialkonstruktivism har sina rötter i den gren av konstruktivismen som representeras av Vygotskij och som betonar det sociala samspelet och språkets roll för lärandet. Socialkonstruktivismens teorier om gruppens betydelse för ett fungerande samhälle nådde så småningom fram till didaktiska teorier om gruppens betydelse för lärande av matematik. Säljö tolkar och beskriver motsatserna mellan Vygotskij och Piaget. Vygotskij tolkas så som att kommunikation med andra människor (särskilt det verbala språket) är det som formar vårt tänkande. Däremot tolkas Piaget så som att språk och tänkande är oberoende företeelser. En annan skillnad som lyfts mellan Piaget och Vygotskij är att Piaget ser barnets egen aktivitet och undersökande av världen som nyckeln till kunskap, medan Vygotskij betonar barnets beroende av den vuxnes stöd och hjälp med att förstå världen. Vidare beskriver Säljö om Vygotskijs *sociokulturella perspektiv* som innebär att kunskaper är något som människor blir delaktiga i genom pedagogiska förlopp där barnens erfarenheter tas tillvara på. Säljö lyfter en banbrytande tanke i Vygotskijs arbete som är *den närmaste proximala utvecklingszonen.* När människor väl behärskar ett begrepp eller färdighet så är de mycket nära att också behärska något nytt. Utvecklingszonen är den zon där människor är känsliga för såväl instruktion och förklaringar av läraren eller en kompetent kamrat som där de under ledning men dock mer och mer självständigt kan tillägna sig andras kunskaper. Säljö skriver att i Sverige har exempelvis Vygotskijs teorier inflytande på läroplanen Lgr 11.

2.2 Matematiskt lärande

Under denna rubrik beskrivs kompetenser och förmågor som berör elevers lärande av matematik och samband med läroplanen Lgr 11.

2.2.1 Matematiska kompetenser och Lgr 11

Olika forskningsresultat visar att matematisk kunskap innebär att kunna uttrycka kunnandet i kompetenser som är generella för varierande områden inom matematiken. Reys, Lindquist, Lambdin och Smith (2012) menar att den forskningsöversikt som beskrivs i Kilpatrick et al. (2001) är ett av de tydligaste ramverken som beskriver sådana kompetenser i termer såsom strategisk kompetens, begreppsförståelse metodförståelse med flera. Dessa kompetenser återfinns även i kursplanen för matematik och utrycks där i förmågor och syften som bör ses i ett holistiskt perspektiv där förmågor uttrycker olika aspekter av ett matematikkunnande (Karlsson & Kilborn, 2015). Kursplanen ger emellertid ett tolkningsutrymme för lärare vilket kan illustreras av att exempelvis begreppet bråk återfinns i det centrala innehållet men inte i kunskapskraven för årskurs 6 (Kilborn, 2014). Han menar att bråk är ett sådant grundläggande begrepp som elever enligt syftet för matematik ska utveckla förtrogenhet med, eftersom bråk och dess olika uttrycksformer är en förutsättning för att förstå andra områden i matematiken. Löwing (2016) menar att en faktor som bidrar till svenska elevers otillfredsställande resultat i internationella undersökningar, också kan vara att det i dessa skett en förskjutning i synen på matematiken från kunskap om metoder och algoritmer till att förstå begrepp när de tillämpas i olika sammanhang genom problemlösning. Det blir svårt för elever att förklara strategier och problemlösningar som berör begrepp de inte förstår menar Löwing. I Danmark har Niss och Højgaard (2011) också sammanställt forskning om de kompetenser som både elever och lärare bör ges möjligheter att utveckla.

Enligt kursplanen i matematik ska varje elev ges möjlighet att utveckla sitt intresse och sin förståelse av matematik. En förutsättning för detta är att läraren kan kartlägga varje elevs kunskaper och förståelse vid olika tillfällen i undervisningen (Löwing, 2016; Jakobsen et al., 2014). Enligt kursplanen i matematik ska varje elev ges möjlighet att utveckla sitt intresse och sin förståelse av matematik. Löwing och Jakobsen et al. menar att en förutsättning för detta är att läraren har tillräckliga kunskaper om både allmän matematik och skolmatematik (tolkningskunskap enligt Jakobsen et al.) för att kunna kartlägga varje elevs kunskaper och förståelse vid olika tillfällen i undervisningen. I relation till har kartläggningsmaterialet Diamant (Skolverket, 2013), utvecklats och utprovats på 2 – 3 tusen elever per årskurs i grundskolan och resultaten visar att hälften av eleverna i slutet av årskurs 6 har brister i grundläggande kunskaper om bråk. Det centrala innehållet i matematik för årskurserna 4 – 6 i läroplanen Lgr11, bör tolkas som att eleverna behöver ha en grundläggande förståelse och taluppfattning av bråk när de lämnar årskurs 6 menar Löwing.

Matematisk kompetens innebär bland annat att förstå begrepp och vara förtrogen med matematiska metoder. För att förstå matematiska idéer som exempelvis de naturliga och rationella talen måste alla förmågor utvecklas i samklang med varandra. Algoritmer är metoder som kan användas på samma sätt varje gång för att lösa matematiska uppgifter i olika situationer och underlättar också lärande förutsatt att underliggande begrepp är förstådda. Ovanstående är nödvändigt men inte tillräckligt för att kunna formulera, representera och lösa generella matematiska problem. Det krävs också en förmåga att tänka logiskt, reflektera, förklara och motivera problemlösningar. För att kunna utveckla sådana förmågor krävs en tro på sin egen förmåga och en övertygelse att matematik är viktigt och värt den ansträngning det innebär att utveckla matematisk kompetens (Kilpatrick et al., 2001). Denna syn på matematisk kompetens reflekteras i skolverkets kommentarmaterial (Skolverket, 2017).

2.2.2 Lärande av matematik

Forskning visar att svenska och norska elever och lärarstudenter har brister i taluppfattning och begreppsförståelse vilket gör att de får svårigheter att resonera om och kommunicera sina lösningar av matematiska uppgifter och problem (Löwing, 2016; Karlsson, 2015; Jakobsen et al., 2014). När elever resonerar om ett ämne krävs enligt Kilpatrick et al. (2001): a) tillräckliga kunskaper, b) att ämnet är begripligt och c) att kontexten är familjär och komfortabel. Det som är oklart måste förklaras och idéer och strategier som används vid problemlösning måste motiveras i diskussioner med kamrater och lärare. Detta är viktigt för elevers begreppsförståelse och något som elever måste få möjligheter att utveckla från tidig ålder. Elevers lärande av matematik är också beroende av hur motiverade de är. Utmanande frågor om olika sätt att tolka och uttrycka varierande aspekter av matematiska områden med anknytning till elevers erfarenheter ökar förståelse och motivation - likaså att de får kontinuerlig återkoppling av läraren i diskussioner och aktiviteter som bygger på och utvecklar elevens resonemang och tänkande.

Elever måste enligt Kilpatrick et al. (2001) och läroplanen Lgr 11, få möjligheter i undervisningen att koppla sin uppfattning och erfarenhet till matematiska abstraktioner. Löwing och Kilborn (2002) beskriver i detta sammanhang en verklighetsanknuten ämnesdidaktisk teori om bråk och hur exempelvis division med bråk kan läras. Modellen går ut på att tolka olika divisioner från att vara uttryckta som matematiska uttryck i symbolform, till verklighetsanknutna exempel från elevernas verklighet (se avsnitt 2.5.5). Kilpatrick et al. skriver att lämpliga aktiviteter för lärande av bråk kan vara att översätta en uttrycksform till en annan - text till bild, symbol eller ord och tvärtom. Det kan också ske genom att de ges möjligheter till laborativa aktiviteter med olika föremål exempelvis papper, snören, måttband och Cuisenairestavar. Här finns dock en risk att elever inte uppfattar de matematiska idéer och samband som är målet med aktiviteten eftersom barn uppfattar olika modeller av abstrakta fenomen annorlunda än vuxna gör. För att aktiviteten ska utveckla elevers lärande krävs därför mycket stöd och noggrann planering av lärare menar Kilpatrick et al.

2.3 Tidigare forskning om bråk

Piaget menar att barn lär sig genom att konstruera sin egen verklighet utifrån sina egna erfarenheter. Enligt Vygotskijs sociokulturella perspektiv är kunskaper något som elever blir delaktiga i genom pedagogiska förlopp där man tar vara på deras erfarenheter. Respekten för barns värde, erfarenheter och kompetens är också centralt i den sociokulturella teorin (Säljö, 2014). I förhållande till läroplanen Lgr 11 återspeglas detta bland annat i att undervisningen ska anpassas till varje elevs förutsättningar och behov och utgå från elevernas bakgrund, tidigare erfarenheter, språk och kunskaper. För att kunna resonera om begrepp och metoder och kunna visa kunskaper genom olika uttryckssätt bör begreppsförmåga och metodförmåga övas integrerat genom problemlösning i en klassrumsmiljö där eleverna är trygga och känner att deras värde, erfarenheter och kompetens tas till vara (Kilpatrick et al., 2001). Denna syn reflekteras även i skolverkets kommentarmaterial (Skolverket, 2017).

Klassrumsmiljöns betydelse för lärandet undersöktes av Bulgar (2003) som visade att barn i årskurs 4 kan förstå divisioner med bråk innan de undervisats om metoder och algoritmer om bråk. Resultatet visar att detta är möjligt under förutsättning att lärandet sker i en tillåtande klassrumsmiljö i samspel med kamrater och lärare där självförtroende och motivation att lära kan utvecklas. Hennes metod var att replikera en undersökning om barns lärande i årskurs 4 genom att undersöka samma lärande i en liknande klassrumsmiljö med elever i årskurs 5. Skillnaderna var att eleverna i årskurs 5 hade fått undervisning om bråk, vilket den första gruppen inte fått. Resultaten visar att båda grupperna använde samma strategier och resonemang och att en tillåtande klassrumsmiljö är avgörande för lärande samt att utveckling av begreppsförståelse bör föregå undervisning om metoder och algoritmer. Det finns annars en risk att elever förlorar intresset att förstå begrepp om de redan kan utföra beräkningar med hjälp av metoder och algoritmer de kan lära utantill menar Bulgar. Ett annat sätt att öka elevers intresse och motivation för att förstå abstrakta begrepp som bråk är om lärare efter varje lektion analyserar och identifierar i detalj vad elever inte förstod så att de kan förklara bättre under nästa. Då bör elever vara som mest mottagliga för att lära nya begrepp enligt Vygotskijs tankar om den närmaste proximala utvecklingszonen. Detta illustreras av

Mårtensson (2015) som i en studie visar hur lärare, med hjälp av forskarens kunskaper om variationsteori förbättrar nästa lektion tills eleverna förstår. Hon undersökte 75 högstadieelevers lärande av bland annat lärandeobjektet ”att förstå varför kvoten kan bli större än talet i täljaren” (Mårtensson, 2015, s. 103). Metoden bestod i att forskare och lärare tillsammans planerade en serie lektioner som sedan genomfördes och filmades (*Learning study*). Efter varje lektion analyserades den i detalj av lärare och forskare i möten som även de filmades. Nästa lektion kunde då revideras baserat på erfarenheter från den föregående. Mårtensson menar att en sådan analys är betydelsefull för elevers lärande eftersom den bygger på erfarenheter om elevers förståelser.

Forskning om elevers förståelse av matematik är omfattande och resultaten visar bland annat på brister i taluppfattning och aritmetik hos europeiska och amerikanska elever (Kilpatrick et al., 2001; Skolverket, 2016b; Löwing, 2016). Karlsson (2015) undersökte lärarstudenters kunskaper om taluppfattning och algebra och vilka missuppfattningar de gjorde. Hennes studie genomfördes i början av matematikutbildningen för studenter med inriktning mot årskurserna 4 – 6, med syftet att ge ett bättre underlag för kommande kurser. Metoden för undersökningen innebar att studenterna först fick lösa ett antal uppgifter och förklara hur de tänkte. Analysen av studentlösningarna gav information om vad studenterna lyckades mer eller mindre väl med. Studenternas förklaringar gav kvalitativ information som gjorde att frågor i en efterföljande intervju kunde preciseras. Resultaten visar att ”studenterna hade mer eller mindre allvarliga brister när det gällde att lösa enkla uppgifter. Det innebar i sin tur att de fick svårt att följa undervisningen på högskolan” (Karlsson, 2015, s. 3). Detta får konsekvenser för de yngre elever som ska undervisas av dessa studenter och därför är kompetensutveckling viktigt (Kilborn, 2014). I en australiensk studie (Clarke, Roche & Mitchell, 2007) intervjuades 323 elever enskilt i slutet av årskurs 6 om lösningar, strategier och missuppfattningar med hjälp av noggrant utprovade uppgifter från tidigare forskning om bråks olika tolkningar. Resultaten visar att såväl elever som lärare behöver fler tillfällen för att lära sig bråkens olika tolkningar. De uppmuntrar också lärare att använda några av deras uppgifter vid enskilda intervjuer med elever eftersom de ger betydande insikter i elevers förståelse och vanliga missuppfattningar men även insikter om lärarens egen undervisning. Metoden att inspireras av erkända forskares uppgifter i sin egen forskning är accepterad i forskning och har använts av exempelvis Charalambous och Pitta-Pantazi (2007), samt av Löwing (2013) vid konstruktionen av det formativa kartläggningsmaterialet Diamant.

Att utforma uppgifter om matematik och bråk som verkligen mäter vad som avses att mätas kräver kunskaper om tidigare forskning. Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) konstruerade ett test som bestod av 50 uppgifter strukturerade enligt en teoretisk modell som beskriver aspekterna del av helhet, kvot, mätning, operator och förhållande samt ekvivalenta bråk och räkneoperationer med bråk. Uppgifterna valdes huvudsakligen ut från tidigare forskning och användes för att undersöka elevers prestationer i dessa områden och huruvida det fanns samband mellan prestationerna både inom de olika aspekterna och mellan aspekter och operationer I undersökningen deltog 340 cypriotiska elever i årskurs 5 och 304 elever i årskurs 6. För svenska förhållande har Skolverket (2013) tagit fram kartläggningsmaterialet *Diamant* som är ett formativt verktyg för löpande bedömning av kunskaper om rationella tal och övrigt centralt innehåll i matematik för den svenska grundskolan. Materialet är noga utprovat på ett stort antal elever och innehåller även didaktiska kommentarer och strukturerade uppgifter om bland annat rationella tal och bråk (Skolverket, 2013; Löwing, 2016).

Sammanfattningsvis har tidigare forskning betonat klassrumsmiljöns betydelse för matematiskt lärande. Brister i elevers taluppfattning och aritmetik har lyfts fram och metoder för hur skolelevers och lärarstudenters kunskap om bråk kan mätas samt hur uppgifter kan utformas för detta ändamål. Lärande om bråk kräver goda kunskaper om både begrepp och metoder. För detta ändamål har olika forskare (Kieren, 1976; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) tagit fram modeller och teorier för att förstå tal i bråkform.

2.4 Matematiska modeller för bråk

Mängden av de naturliga talen kan konstrueras genom att addera 1 till föregående tal förutsatt att det första talet i mängden är definierat. Däremot är det betydligt mer komplicerat att konstruera de rationella talen eftersom de kan tolkas på många olika sätt. Att beskriva de rationella talen med en teoretisk modell har intresserat många forskare och de tycks vara överens om att förståelsen av bråk som del av en kontinuerlig eller diskret helhet är en nödvändig förutsättning för att förstå andra tolkningar (aspekter) av bråk såsom kvot, operator, mätning och förhållande. Det finns också en samstämmighet om att operationer såsom att beräkna en andel, att dividera, att förlänga och förkorta, att addera, att multiplicera, och att jämföra bråk, kan kopplas till en eller flera av dessa aspekter samt att problemlösning är kopplat till samtliga fem aspekter (Kieren, 1976; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Roche & Clarke, 2013). Förutom aspekten bråk som del av en helhet kan division förstås utifrån aspekten kvot. Multiplikation eller beräkningar av en viss andel av en kvantitet kan förstås utifrån aspekten operator. Operationerna förlänga, förkorta och multiplikation kan förstås utifrån aspekten förhållande medan addition kan förstås utifrån aspekten mätning (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Vidare har Löwing och Kilborn (2002) beskrivit en didaktisk teori som handlar om hur bråk kan uppfattas utifrån olika vardagsförankrade aspekter och hur divisioner med bråk då kan förstås. Fokus i denna teori ligger på en modell som beskriver aspekterna: bråk som tal, bråk som del av en helhet, bråk som del av ett antal, bråk som proportion eller andel samt bråk som förhållande. De ”stora idéer” som förenar bråkens olika aspekter handlar om begreppen delning, enhet och kvantitet enligt Carpenter, Fennema och Romberg (2012).

Att utveckla ett proportionellt tänkande kräver stor förståelse av delning, enheter och kvantiteter är svårt och tar lång tid att utveckla eftersom det berör en relation mellan flera konstanta förhållanden (Kilpatrick et al., 2001) men har stor betydelse för andra områden i matematiken såsom att beskriva linjära förändringar, lösa ekvationer och algebra (Kilborn, 2014). I detta arbete behandlas endast förkunskaper som elever kan ges möjlighet att utveckla en förståelsegrund för proportionaliteter i kommande undervisning på högstadiet.

2.4.1 Del av en helhet

I ett bråk exempelvis $\frac{3}{4}$ (tre fjärdedelar) betecknar nämnaren enheten och täljaren antalet enheter. Nämnarens betydelse som enhet är viktig för att förstå till exempel att tredjedelar och fjärdedelar inte kan adderas eller jämföras (Kilborn, 2014). Ett bråk kan tolkas som tre av fyra lika delar av något som antingen kan vara en helhet eller ett antal. Denna förståelse är beroende av att kunna dela kontinuerliga storheter som area, längd och volym i lika delar men också av att kunna dela och gruppera en ändlig mängd av diskreta objekt i lika stora delmängder (bollar, pizzor exempelvis). Tolkningen av bråk som del av en helhet är däremot inte ensam tillräcklig för att förstå bråk men nödvändig för att förstå de övriga aspekterna av bråk (Kilpatrick et al., 2001). Den tycks också vara viktig vid aktiviteter som förbereder elever för undervisning om ekvivalenta bråk och jämförelser som i sin tur är en förutsättning för att förstå räkneoperationer såsom division med bråk (Behr & Post, 1992).

2.4.2 Kvot

Symbolen $\frac{a}{b}$ kan också användas i stället för a/b för att referera till kvoten av en division. En förståelse av begreppet delning är kritisk för att kunna förstå denna tolkning av bråk. Om tre pizzor ska delas lika mellan fyra personer kan man dela varje pizza i fyra lika delar och fördela dessa en och en till varje person. På så sätt får varje person $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ eller $\frac{3}{4}$ (Behr & Post, 1992). Divisioner går i allmänhet inte jämnt ut men genom att införa de rationella talen kan sådana kvoter uttryckas som bråk. Varje tal i bråkform är alltså lösningen på en division som i $\frac{2}{3}$ = 2/3. Om exempelvis tre personer ska dela lika på åtta äpplen får alltså varje person åtta tredjedels äpple. Detta innebär också att bråket $\frac{8}{3}$ per definition är det tal som multiplicerat med 3 blir 8. Praktiska resonemang leder till att endast sex äpplen kan delas lika och att två av dem måste skäras i tre lika delar. Den blandade bråkformen $2\frac{2}{3}$ kan då motiveras som svar på delningsproblem (Kilpatrick et al., 2001).

2.4.3 Mätning

Bråk används vid mätning av en storhet för att ange mätningens storlek i förhållande till en enhet av storheten. En längdmätning kan exempelvis anges som ett antal fjärdedelar eller åttondelar av en tum eller i ett antal millimeter. Genom att dela i fler och fler men mindre och mindre delar kan mätningen uttryckas med ökande precision. Rationella tal som $\frac{3}{4}$ och $\frac{1}{8}$ representeras som punkter på en tallinje på ett bestämt avstånd från noll och antalet delningar av enhetssträckan mellan noll och ett avgör precisionen. Begreppen delning, kvantitet och enhet är gemensamt för varje tolkning av bråk och exempelvis är tre fjärdedels decimeter mindre än en åttondels kilometer (Behr & Post, 1992; Kilpatrick et al., 2001; Clarke et al., 2007).

2.4.4 Förhållande (proportion)

Förhållande är ett multiplikativt samband mellan två storheter ($\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c$). Till exempel kan koncentrerad saft spädas genom att blanda två delar saft och fem delar vatten. Andelen koncentrat är $\frac{2}{7}$ men förhållande mellan koncentrat och vatten uttrycks som 2:5. Proportionella resonemang handlar om samband mellan storheter där förhållandet mellan dem är konstant. Om 3 ballonger kostar 20 kronor och 6 ballonger kostar 40 kr är förhållandet proportionellt eftersom $\frac{20}{3} = \frac{40}{6}$. Bråk tolkat som division används ofta för att uttrycka proportionella samband som förhållande mellan enheter såsom $\frac{20}{3}$ kronor per ballong eller $\frac{3}{20}$ ballong per krona (Kilpatrick et al., 2001). Proportionalitet är ett sofistikerat begrepp som inte är fullt förstått förrän i sen ungdom. För att kunna uppfatta ett bråk som ett förhållande krävs förståelse av begreppet ekvivalenta bråk och att kunna ”överföra” tallinjens begrepp till bråkets matematiska symbol. Eleven måste också förstå hur tallinjen kan delas in (”skalas”) i lämpliga delar beroende på situation. Dessa förståelser kan byggas upp symboliskt genom praktiska aktiviteter som att exempelvis vika en meterlång pappersremsa i tre respektive sex lika delar. Detta leder till vilken position talet 2/3 har på remsan samtidigt som ekvivalensen 2/3 = 4/6 illustreras tydligt. I detta avseende kan man betrakta aspekten förhållande som en sofistikerad version av aspekten mätning (Kieren, 1976).

2.4.5 Operator

Ett bråk kan även tolkas som en operator som förminskar eller förstorar ett tal som i exempelvis $\frac{3}{4}\cdot 12=9$ och $\frac{5}{4}\cdot 8 = 10$. En vanlig missuppfattning är annars att multiplikation alltid ger ett större tal (Clarke et al., 2007; Mårtensson, 2015). Uttrycket $\frac{3}{4}\cdot 12$ kan också tolkas som att talet 12 först förstoras med en faktor 3 och därefter förminskats med en faktor 4 (eller tvärtom). När talet 12 förknippas med en enhet exempelvis meter blir även kopplingen till geometri och skala tydlig. Bråk som operator kan också användas när någonting förstoras eller förminskas i flera steg. När operatorerna $\frac{2}{7}$ och $\frac{3}{5}$ kombineras utgående från 35 enheter av någonting fås i första steget 10 enheter och i andra steget 6 enheter. Detta förtydligar även hur multiplikation av bråk går till eftersom $\frac{2}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot 35 = \frac{6}{35}\cdot 35 = 6$ (Kieren, 1976).

2.5 Strategier och missuppfattningar

Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) beskriver i sin modell hur bråk kan förstås. I modellen beskrivs förutom olika aspekter även sambanden mellan bråkens olika aspekter och ekvivalenta bråk samt multiplikation och division. Det är viktigt att elever ges tid och tillfällen att förstå bråkens många tolkningar och uttrycksformer, vilka strategier de kan använda vid problemlösning och hur de kan undvika missuppfattningar. Det finns annars en risk att elever lär sig regler de inte förstår utantill (Kilpatrick et al., 2001; Löwing, 2016). Genom aktiviteter som tar tillvara på elevernas tidigare erfarenheter av naturliga tal kan elever utveckla en förförståelse av olika samband innan de lär sig att uttrycka sådana i ett formellt matematiskt språk (Behr & Post, 1992; Kilpatrick et al., 2001).

2.5.1 Skillnader mellan rationella tal och naturliga tal

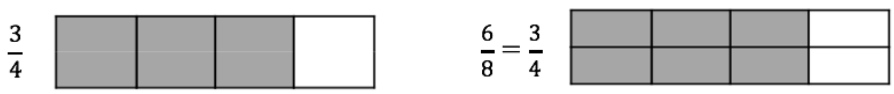
Elever måste ges möjlighet att lära att exempelvis bråket $\frac{3}{5}$ är ett unikt tal som har en storlek och vad täljare och nämnare representerar. Storleken av ett bråk är beroende av en relativ (multiplikativ) jämförelse mellan täljare och nämnare (4 är dubbelt så stort som 2 i $\frac{2}{4}$). Elever är vana vid absoluta jämförelser från de naturliga talen (5 är 2 större än 3 i $\frac{3}{5}$) men relativa jämförelser är nytt och svårt. Detta är en källa till många missuppfattningar vid jämförelser av bråk (Behr & Post, 1992). Att bråk är ett tal är en helt ny tanke för många elever eftersom de vanligtvis associerar bråk till en andel av något som förekommer i deras vardag. Ett bråk liknar två naturliga tal med ett bråkstreck som skiljer dem åt. Inte heller tolkningen av bråk som procent leder självklart till att ett bråk är ett unikt tal. Dessutom finns det en avgörande skillnad mellan de naturliga talen och de rationella. Mellan två hela tal finns det inga fler heltal. Däremot finns det oändligt många rationella tal mellan två rationella tal och ändå går det att avgöra vilket av två bråk som är störst. Missuppfattningar och svårigheter uppstår vid jämförelser och vid generaliseringar av metoder som gäller för de naturliga talen men inte för de rationella talen (Kilpatrick et al., 2001; Behr & Post, 1992). För naturliga tal gäller att 8> 7. Enheten $\frac{1}{7}$ innebär att sträckan mellan 0 och 1 på en tallinje har delats i sju lika delar. Om man delar denna sträcka i åtta lika delar blir varje del mindre och därför är $\frac{1}{8} < \frac{1}{7}$. En vanlig missuppfattning är att elever tänker att en åttondel är större än en sjundedel eftersom de associerar till de naturliga talen. De kan också tro att tre fjärdedelar och fyra femtedelar är lika stora eftersom skillnaden mellan täljare och nämnare är lika stor. Det är viktigt att ge eleverna tillräckligt med tid och tillfällen att utveckla förståelse och ge mening åt de rationella talen (Kilpatrick et al., 2001).

2.5.2 Jämförelser och ekvivalenta bråk

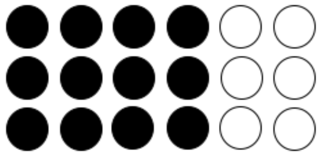
På mellanstadiet möter elever för första gången bråk som inte diskuteras på lågstadiet. Dessa tal kan räknas upp precis som de naturliga talen och det finns lika många naturliga tal som bråk (oändligt många). Begreppet bråk är komplicerat och svårt att förstå vilket kan leda till missuppfattningar. En känd sådan är att elever inte förstår att bråk som exempelvis $\frac{7}{8}$ och $\frac{12}{13}$ är olika tal med en viss storlek utan uppfattar ett bråk som två olika tal och ett streck som separerar dessa (Behr & Post, 1992; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). De tycks inte heller förstå att bråkets storlek kan uppskattas ($\frac{7}{8} \approx 1$ och $\frac{12}{13} \approx 1$) genom att jämföra täljarens och nämnarens relativa storlek och att jämförelser då kan göras med riktmärkena 0, 1 och $\frac{1}{2}$ (McIntosh, 2008). Att jämföra bråken $\frac{7}{8}$, $\frac{1}{2}$ och $\frac{1}{1}$ kan också göras genom kunskap om konstruktionen förhållande och underkonstruktionen ekvivalens, som innebär att ett och samma bråk kan uttryckas på oändligt många sätt ($\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ och $\frac{1}{1} = \frac{8}{8} = 1$). Kunskap om att nämnaren anger antal lika delar och täljaren antalet sådana kan underlätta förståelsen att det går lika bra att jämföra åttondelar som att jämföra något annat förutsatt att de har samma enhet. Genom att i stället jämföra talen 4, 7 och 8 blir det tydligare att $\frac{7}{8} \approx 1$. Saknas en sådan förståelse medför det svårigheter att jämföra dem och därmed svårigheter att förstå andra räkneoperationer såsom addition och division (Behr & Post, 1992; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007).

Den vanligaste metoden vid jämförelser av bråk är att göra liknämnigt. Ett godtyckligt rationellt tal kan skrivas i bråkform på oändligt många sätt som inte förändrar dess värde. Till exempel är 1/2=2/4=4/8 eller 1=2/2=3/3 utbytbara bråk. Denna kunskap kan byggas upp med laborativa aktiviteter i stället för mekanisk inlärning av regler som att ”multiplicera täljare och nämnare med samma tal”. Ett annat sätt att förstå begreppet *förlänga* kan vara att inse att multiplikation med 1 inte förändrar ett tals värde och därför innebär exempelvis förlängning med 2 att multiplicera ett tal med 2/2. Denna insikt kan också skapa medvetenhet om skillnaden mellan att förlänga och att multiplicera bråk. Många elever har också svårigheter att bedöma storleken av ett tal i bråkform i relation till referensmärkena *noll, en halv* och *ett,* där *ett* motsvaras av det hela som delats in i lika delar (McIntosh, 2008).

Att förstå vad som menas med två ekvivalenta (utbytbara) bråk är nödvändigt för att förstå räkneoperationer som exempelvis divisioner med bråk. Ett sätt att utveckla denna förståelse kan vara genom praktiska aktiviteter. Elever kan rita och färglägga olika geometriska figurer eller använda olikfärgade föremål och gruppera dem på olika sätt (Behr & Post, 1992). I figur 2-1 har två kongruenta pappersrektanglar delats på olika sätt och färgats för att öka förståelsen av hur delningar av olika slag leder till att ett och samma bråk kan uttryckas på flera sätt.



Figur 2-1. Bild föreställande pappersrektanglar inspirerad av Behr och Post (1992)



Figur 2-2. Brickor inspirerad av Behr och Post (1992)

I figur 2-2 är 12 av 18 brickor svarta vilket kan uppfattas som bråket $\frac{12}{18}$. Om den grupperas i tre kolumner är två av dessa svarta och bråket $\frac{2}{3}$ är alltså ytterligare ett sätt att representera samma andel. Gruppering i sex kolumner synliggör även bråket $\frac{4}{6}$ som ett mått på andelen svarta brickor och om elever ges tillräcklig tid kan de upptäcka att $\frac{12}{18} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ och resonera om begreppen förlänga och förkorta (Kilpatrick et al., 2001; Behr & Post, 1992).

2.5.3 Samband mellan multiplikation och division

Även andra jämförelser och samband betydelsefulla för division och multiplikation kan illustreras med laborativt material. Att dela upp brickorna i figur 2 i grupper innebär division och att slå ihop grupperna till en helhet innebär multiplikation. De tolv svarta brickorna utgör två tredjedelar av totalt arton brickor. Denna andel kan tolkas som divisionen 18/3 följt av multiplikationen $6 \cdot 2$ eller $\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$. Att ångra effekten av operationerna innebär först divisionen 12/2 följt av multiplikationen 6*3 eller $\frac{3}{2} \cdot 12 = 18$. Detta synliggör begreppen andel och att multiplikation och division är *inversa* operationer. Andra samband med multiplikation och division tal kan diskuteras genom likheterna $\frac{2}{3} \cdot 18 = 12$ och $12/\frac{2}{3} = 18$. Missuppfattningen att multiplikation alltid gör ett tal större och division mindre blir också konkret genom dessa likheter och elever får tillfälle att resonera om olika jämförelser och samband som är en förutsättning för att förstå division (Kilpatrick et al., 2001; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Mårtensson, 2015).

Divisioner med bråk är erkänt svåra att förstå men att utgå från elevernas tidigare förståelse hjälper eleverna. De bör ha kunskaper från arbete med de naturliga talen att en kvot är större än ett när täljaren är större än nämnaren, lika med ett när täljare och nämnare är lika stora och mindre än ett när nämnaren är större än täljaren. Detta är sant även om täljare och/eller nämnare är bråk. Användande av riktmärken (vanligtvis $\frac{1}{2}$ och 1) för jämförelser tycks vara en framgångsrik strategi (McIntosh, 2008). Ett exempel på detta är motiveringen att $\frac{1}{3} < \frac{5}{8}$ eftersom $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ och $\frac{5}{8} > \frac{1}{2}$. Vid jämförelser av bråk fokuseras ibland enbart på antingen täljarens eller nämnarens storlek vilket leder till felaktiga resultat. Generaliseringar av samband mellan naturliga tal kan vara en orsak till det felaktiga resonemanget att $\frac{1}{3} < \frac{1}{5}$ eftersom $3 < 5$ (Behr & Post, 1992). Divisioner med tal mindre än ett uppfattas också ofullständigt (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007) och leder till missuppfattningen att multiplikation alltid blir större och division mindre. En annan orsak till denna missuppfattning kan också vara en bristande erfarenhet av aspekten bråk som en operator för att förminska eller förstora ett tal. Till exempel är produkten $\frac{2}{3} \cdot 9$ mindre än 9 och kvoten $9/\frac{2}{3}$ större än 9 (Clarke et al., 2007).

Division innebär att fördela en mängd av någonting i ett antal lika stora grupper. Multiplikation kan då uppfattas som att slå ihop grupperna till den ursprungliga mängden. Att fördela en mängd i fem grupper med fyra element i varje leder till divisionen $20/5$ medan multiplikationen $\frac{20}{5} \cdot 5$ återställer den ursprungliga mängden. (Kilpatrick et al., 2001). Studier visar också att endast ett fåtal grundskolelärare och ännu färre elever hade automatiserat tolkningen av bråk som division. Hur mycket får varje person om 3 pizzor delas lika mellan 5 personer? I stället för att automatiskt svara $\frac{3}{5}$ av en pizza, dividerade de genom att rita eller genom huvudräkning. En annan studie visade att endast 47% av 14 år gamla elever var medvetna om att 3/5 och $\frac{3}{5}$ är ekvivalenta uttryck (Clarke et al., 2007). Division och multiplikation är *inversa operationer* som upphäver varandras verkan och detta gäller även för operationer med bråk. Likheten $4/\frac{1}{2} = 8$ kan också uppfattas som $\frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (hälften av åtta kg är fyra kg) eller som $8 \cdot \frac{1}{2} = 4$ (åtta halva äpplen är fyra hela äpplen). Andra användbara förståelsestrategier vid division och multiplikation är att använda talet ett som är speciellt i den bemärkelsen att om ett godtyckligt tal multipliceras eller divideras med talet ett förändras inte dess värde. Talet 1 kan skrivas på olika sätt som i likheterna $\frac{4}{5}/\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = 1$ (Kilpatrick et al., 2001).

2.5.5 Delningsdivision och innehållsdivision

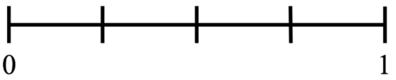
Att förstå division är beroende av att kunna dela och gruppera kontinuerliga storheter som area, längd och volym i lika delar men också av att kunna dela och gruppera en ändlig mängd av diskreta objekt i lika stora delmängder (bollar, pizzor exempelvis). Om antalet grupper är känt och antalet element i varje grupp efterfrågas kan hela mängden fördelas genom att fördela ett element till varje grupp och därefter upprepa detta tills mängden är slut. Detta är innebörden av metoden delningsdivision och exempelvis leder frågan ”Hur många kakor innehåller varje påse om 20 kakor ska fördelas lika i 5 påsar?” till delningsdivisionen 20/5. Problemet att avgöra hur mycket pizza varje person får om 3 pizzor delas lika på 4 personer löses direkt av de elever som automatiserat tolkningen av bråk som kvot och förstått att divisionen ¾ är ekvivalent med talet (bråket) $\frac{3}{4}$. Övriga elever kan exempelvis använda strategin att dela varje pizza i 4 lika delar som sedan fördelas en fjärdedel i taget tills varje person fått tre sådana ($\frac{3}{4}$ av en pizza). Om de använder samma strategi då 5 pizzor ska fördelas lika mellan 4 personer får varje person en hel pizza plus $\frac{1}{4}$ av den sista pizzan. Svårigheten ligger i att tolka detta som $\frac{5}{4}$ av en pizza (Behr & Post, 1992).

Ett annat sätt att fördela en mängd om gruppernas storlek är känd kallas för innehållsdivision. Hur många påsar krävs för att fördela 20 kakor om varje påse innehåller 4 kakor? I detta fall kan elementen fördelas genom att fylla första gruppen och därefter nästa tills elementen är slut. (Kilpatrick et al., 2001). Förtrogenhet om begreppet bråk innebär att kunna beskriva och tolka bråk på olika sätt. Om exempelvis $\frac{6}{7}$ delas i 3 grupper med $\frac{2}{7}$ i varje grupp kan divisionen $\frac{6}{7}/\frac{2}{7}$ tolkas som innehållsdivision och kvoten 3 förstås (Kilborn, 2014). Divisioner med bråk mellan 0 och 1 ger en kvot som är större än täljaren och detta bör förstås med innehållsdivision. Divisionen $4/\frac{1}{3}$ bör exempelvis förstås som att en helhet har delats i 3 lika delar och att det ryms 12 sådana delar i 4 helheter (Skolverket, 2013; Roche & Clarke, 2013).

Löwing och Kilborn (2002) menar att om exempelvis ett bråk ska delas i ett antal lika delar, uppfattar många personer detta som svårt om divisionen uttrycks i formellt matematiskt symbolspråk. Däremot kan den uppfattas som lätt om läraren uttrycker den på ett mer verklighetsanknutet sätt och på så sätt ger eleverna möjlighet till att stegvis förstå en matematisk idé genom verklighetsanknutna exempel. Divisionen $\frac{39}{7}/13$ kan se obegriplig ut medan uppgiften att dela 39 läsk lika med 13 personer bör uppfattas som lätt om eleverna har förförståelsen att $\frac{39}{7}/13$ kan tolkas som 39· $\frac{1}{7}$ /13, det vill säga att det är 39 sjundedelar som ska delas i 13 lika delar. Att det är svårt att dela 39 sjundedelar med 13 kan då förklaras med en bristande förståelse att om 39 sjundedelar eller 39 läsk ska delas med 13 bör svaren bli lika (Löwing & Kilborn, 2002, s. 357). Förutom förståelsen att täljaren betyder ett mätetal och att nämnaren kan uppfattas som en enhet av någon storhet, är förståelsen att division kan uppfattas på två olika sätt viktig — Antingen som delningsdivision när 39 läsk ska fördelas lika på 13 personer eller som innehållsdivision när frågan exempelvis är hur många kolor man kan köpa för 12 kronor om varje kola kostar 3kr. Hur många gånger ryms 3 i 12? Division där ett bråk (rationellt tal) delas med ett annat bråk bör lösas med innehållsdivision (Skolverket, 2013). Till exempel ryms bråket $\frac{1}{6}$, 4 gånger i bråket $\frac{4}{6}$ eller uttryckt i symboler $\frac{4}{6}/\frac{1}{6}$ = 4. I uppgiften $\frac{4}{3}/\frac{1}{6}$ har bråken olika enheter vilket kan lösas med förlängning och den ekvivalenta divisionen $\frac{8}{6}/\frac{1}{6}$ = 8 alltså att en sjättedel ryms 8 gånger i 8 sjättedelar. En verklighetsanknuten uppgift kan exempelvis vara att fråga hur många gånger man kan ta 4 läsk från en back med 24 läsk. Eftersom en läsk innehåller en tredjedels liter kan detta problem uttryckas i symboler som $\frac{24}{3}/\frac{4}{3}$ = 6, alltså hur många gånger 4 flaskor ryms i 24 flaskor (Löwing & Kilborn, 2002).

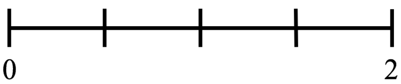
2.5.6 Mätning och enheter

Det är grundläggande att förstå att avståndet mellan 0 och 1 på en tallinje representerar en enhetssträcka som kan delas in i mindre och mindre delenheter exempelvis som när meter delas i decimeter eller centimeter. Talet 1 markerar slutpunkten på en sådan sträcka och talet 2 slutpunkten på två sådana sträckor (Behr & Post, 1992). Att sätta fokus på enheten vid jämförelser av rationella tal är viktigt. En fjärdedels meter är exempelvis större än en tredjedels decimeter. Endast hälften av 323 australienska elever i årskurs 6 kunde placera bråket $\frac{2}{3}$ korrekt på en tallinje. De tycks inte uppfatta bråk som självständiga tal vilket kan bero på att aspekten bråk som mätning inte ägnas tillräcklig uppmärksamhet i undervisningen och läroplaner (Clarke et al., 2007). Laborativa aktiviteter med stavar och måttstockar kan åskådliggöra delning av avståndet mellan noll och ett i mindre och mindre delar och på så sätt koppla ihop mätning av längder med både stambråk och andra bråk. Ett sätt att förstå exempelvis divisionen $4/\frac{1}{2}$ kan vara att illustrera en delning av en sträcka i halva meter. Genom mätning kan elever också konstatera hur många gånger en sträcka med längden 2 tredjedels meter det behövs för att mäta längden 2 meter och hur många det då behövs för att mäta längden 12 meter (Kilpatrick et al., 2001; Behr & Post, 1992). Tanketavlor där matematiska symboler kopplas ihop med bild och text gynnar förståelse och är ett bra hjälpmedel vid sådana resonemang. Bråk och heltal är rationella tal som kan tolkas som en punkt eller sträcka på en tallinje. En viktig metod för att åskådliggöra detta är att är att placera ut talen som ska jämföras på en tom tallinje (McIntosh, 2008). Det tycks vara lättare att korrekt placera ut bråk om tallinjen har längden 1 och är graderad i samma antal delar som nämnaren anger (se figur 2-3) där exempelvis bråket $\frac{3}{4}$ kan tolkas som $3 \cdot \frac{1}{4}$ och att om tre sådana sträckor läggs ut med start från 0 slutar dessa i punkten $\frac{3}{4}$ (Behr & Post, 1992).



Figur 2-3. Tallinje inspirerad av Behr och Post (1992)

Behr och Post (1992) citerar forskning som visar att elever har svårare att placera ut bråk om tallinjen har en längd som är större än 1 eller om tallinjen inte är delad alls eller delad på annat sätt än det bråk som ska placeras ut. Elever får då svårigheter att korrekt placera exempelvis $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{4}$ och $\frac{3}{4}$ i figur 2-4, speciellt om endast 0 och 2 har markerats.



Figur 2-4. Tallinje inspirerad av Behr och Post (1992)

3 Metod

Här beskrivs valda metoder som behövs för att kunna besvara studiens syfte och frågeställningarna.

a) På vilka sätt uttrycker elever i årskurs 6 sina kunskaper om olika aspekter av bråk, jämförelser och division? Vilka resonemang och strategier använder de samt vilka samband kan det finnas mellan deras kunskaper om bråks olika aspekter och deras kunskaper om jämförelser och division med bråk.

b) Vilka möjligheter upplever elever de fått att utveckla sin förståelse av bråks aspekter samt jämförelser och division med bråk?
c) Vilka möjligheter upplever lärare att de gett elever att utveckla förståelse av bråks aspekter samt jämförelser och divisioner med bråk?

3.1 Metodval

För att kunna besvara studiens syfte och frågeställningar valde vi flermetodsforskning. Flermetodsforskning innebär enligt Bryman (2011) en kombination av kvalitativa och kvantitativa metoder där syftet är att insamlade data från de olika metoderna ska vara lika informerande. Bryman lyfter att valet av en flermetodsforskning ska baseras på frågeställningarna och inte på tanken att ju mer insamlad data, desto bättre resultat. Därför anser vi att denna metod blir att föredra då det stämmer väl in i våra frågeställningar. Detta eftersom vi för det första vill kartlägga elevers kunskaper med hjälp av en skriftlig diagnos (kvantitativ metod). I frågeställningarna vill vi även undersöka elevers strategier och resonemang vilket gjorde att vi ville ha kompletterande kvalitativ information och då fick eleverna även förklara skriftligt hur de löst uppgifterna i samband med den skriftliga diagnosen. Vi valde sedan efterföljande elevintervjuer för att sedan kunna undersöka elevers kunskaper djupare samt vilka möjligheter de fått att utveckla sin förståelse om bråk. För att kunna undersöka vilka möjligheter lärarna upplever att de gett eleverna valde vi även här intervju som dock fick ändras till valet att lärarna tillsammans svarade på frågor skriftligt på grund av tidsbrist från deras sida. Bryman beskriver att flermetodsforskning har ökat trots att det finns forskare som riktar kritik mot metoden med följande två väsentliga argument som dels är att de olika metoderna vilar på olika kunskapsteoretiska teser och dels att metoderna står för olika paradigmer. Kvale och Brinkmann (2014) menar att kritiken med olika paradigmer inte är problemet utan att det snarare är en praktisk fråga. Olika medier som text och siffror som innebär olika analystekniker kräver stor kompetens förvärvad genom lång erfarenhet. Nackdelen med detta i åtanke för vår del blir dels den bristande kompetens vi har och dels den begränsade tiden vi har till förfogande för undersökningen. Av dessa skäl för att kompensera tidsbristen valde vi att inspireras av Karlsson (2015) med tabeller för att presentera och analysera resultat. För att ytterligare spara tid valde vi även Excel som analysverktyg. Karlsson menar genom att beräkna lösningsfrekvenser för varje uppgift i en diagnos får man information om vilka områden de upplever är svåra eller lätta.

En annan fördel som Karlsson (2015) nämner i sin studie är att den kvantitativa ansatsen kan medföra intervjufrågor av högre kvalitet till efterkommande intervju. Vi insåg fördelarna med detta och menar att vi då kan planera och lyckas bättre med efterkommande intervjufrågor till elever. Ett av vårt syfte är att undersöka vilka möjligheter elever upplever de fått att utveckla sin förståelse om bråk. Av det skälet menar vi att vårt val av en kvalitativ metod är bra eftersom Kvale och Brinkmann (2014) menar att en kvalitativ undersökning kan lyfta hur eleverna uppfattar ett visst fenomen. Bryman (2011) skriver om semistrukturerad intervju som innebär att frågorna inte behöver komma i en bestämd ordning samt att intervjupersonerna har stor frihet att styra diskussionen. Denna intervjuform anser vi är lämplig för elever eftersom vi använder både induktiv och deduktiv forskningsansats. Vår intervju kommer även att vara öppen för förändring. Kvale och Brinkmann förtydligar att en förändring under intervjun innebär att intervjupersonen kan upptäcka något nytt under intervjun och ändra sin uppfattning och sina tankar.

Kvale och Brinkmann (2014) menar att det är vanligt med ljudinspelningar för att sedan transkribera och skriva ut intervjuerna inför kommande analys. Innan man gör denna tidskrävande process menar Kvale och Brinkman att man bör veta varför man gör det. Vi valde att transkribera intervjuerna eftersom Bryman samt även Kvale och Brinkman menar att det blir lättare att hitta mönster och inte gå miste om någon information. Tematisk analys har ökat den senaste tiden dock saknar metoden en tydlig procedur (Bryman, 2011). Bryman ger förslag till två tillvägagångssätt där den första är Framework som innebär kortfattat att kategorisera funna teman i matriser tillsammans med exempelvis citat från de transkriberade intervjuerna. En annan metod som Bryman lyfter innebär att man aktivt söker teman genom att vara öppen för bland annat repetitioner, likheter och skillnader, saknade data och teorirelaterat material. Vi valde att identifiera teman på detta sätt eftersom vi ansåg att det var minst tidskrävande.

3.1.1 Konstruktion av skriftliga uppgifter

Att konstruera en diagnos och vara säker på att den mäter kunskaper om bråks aspekter samt jämförelser och division med bråk ligger utanför vår kompetens. Därför valde vi att inspireras av lämpliga uppgifter i tidigare forskning (Behr & Post, 1992; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Skolverket, 2013). De skriftliga uppgifter och bilder (bilaga 2) är samtliga konstruerade av oss men inspirerade av ovanstående studier där de alla förekommer i olika variationer och sammanhang. I presentationen av elevernas resultat redovisas för varje uppgift källreferenser och eventuella förändringar av original. Vi var fortfarande osäkra på frågornas kvalitet men förstod av vår handledare att de var rimliga. För att ytterligare försäkra oss om att vi var på rätt spår testade vi frågorna på några elever i årskurs 7 och 9. De upptäckte då att frågan om innehållsdivision inte gick att besvara eftersom vi hade skrivit fel enhet men för övrigt hade de inga kommentarer förutom att det var bättre att lära decimaltal.

3.1.2 Konstruktion av intervjufrågor och skriftliga frågor

Kvale och Brinkmann (2014) förtydligar vikten av att ställa intervjufrågor anpassade efter personen för att få så utförliga svar som möjligt. Följande två huvudfrågor formulerades samt eventuella följdfrågor för att få mer utförliga svar vid behov:

1. **Kan du berätta om VAD du har fått för möjligheter att lära om bråk?**
   Exempel på en följdfråga: Kommer du ihåg om ni har jobbat med uppgifter som liknar någon av de på diagnosen? Vad gjorde ni då?
2. **Kan du berätta om HUR du har fått möjlighet att lära dig om bråk på lektionerna?**
   Exempel på en följdfråga: I vissa klasser brukar eleverna ibland jobba enskilt och ibland tillsammans med varandra, kan du berätta lite om hur ni jobbar i er klass?

Vid konstruktion av skriftliga frågor till lärare valde vi ut frågor från det tänkta intervjuschema varav två huvudfrågor som motsvarar de huvudfrågor till elevintervjuer.

Huvudfrågor:

1. **Kan du berätta om VAD eleverna har getts för möjligheter att lära sig om bråk?**
2. **Kan du berätta om HUR eleverna har fått möjlighet att lära sig om bråk på lektionerna?**

Följdfrågor:

3. Är bråk något som elever brukar uppfatta svårt tycker du?
4. Hur skulle du beskriva en optimal matematiklektion?
5. Känner du att där är något som begränsar din undervisning?

3.1.3 Val av deltagare och genomförande

Datainsamlingen startade med att skicka en intresseförfrågan via mail till rektorer på ett stort antal mellanstadieskolor i nordöstra Skåne. I mailet presenterade vi oss och förklarade syftet med examensarbetet och angav även den ungefärliga tid vi begärde av de elever och lärare som ville delta. Det visade sig svårt att få svar via mail men efter telefonkontakter valdes den första skolan som ville delta i studien. Klassen som valdes bestod av 35 elever varav 17 flickor och 18 pojkar samt deras två lärare. Vid första besöket träffade vi klassen och deras matematiklärare. Eleverna fick då informationsbrevet (bilaga 1) att ta hem till föräldrarna för samtycke till studien. Därefter genomförde eleverna uppgifterna i diagnosen som tog cirka en timme totalt. Vid nästa besök var syftet enbart att samla in undertecknade blanketter av vårdnadshavare. Det var 7 av eleverna som hade fått det tillstånd till studien som vi begärde. Deras diagnoser rättades då med 1 poäng för varje korrekt lösning. De elever som inte lämnade tillbaka undertecknad blankett uteslöts från vår studie. Med anledning av att transkribering per intervju tar tid valde vi att intervjua 4 av 7 elever. För att få skillnader mellan elevers olika metoder och resonemang som leder till dels felaktiga och dels korrekta svar valde vi två elever där den ena var baserat på lägst poäng respektive den andra på högst poäng. De andra två eleverna valde vi då vi önskade jämn könsfördelning i intervjugruppen i och med att vi inte ville införa eventuella normer i den befintliga klassrumsmiljön (se rubrik 3.1.4 Etiska övervägande). Under nästa besök genomförde vi enskilda intervjuer med de fyra utvalda eleverna där varje intervju tog cirka 10 minuter. Under intervjuerna använde vi oss av en icke ifylld diagnos för att referera till en viss uppgift. Vi ställde två huvudfrågor till varje elev och följdfrågor vid behov. Vi spelade in intervjuerna med applikationen röstmemo och intervjuerna transkriberades samma dag. På grund av tidsbrist från lärarnas sida kunde vi inte genomföra vår planerade intervju med lärarna. Lärarna besvarade istället frågor skriftligt. Vi valde två huvudfrågor samt tre följdfrågor från det planerade intervjuschema som vi önskade få besvarade senast efter fem dagar.

3.1.4 Etiska övervägande

Regler för god forskningssed är beskrivna i Vetenskapsrådet (2017) där de viktigaste generella uppförandekraven handlar om att forskaren ska tala sanning, inte skada, öppet redovisa, inte stjäla, noggrant dokumentera och att vara rättvis. Etik går att beskriva med regler man kommer överens om att förhålla sig till men moral är personlig och visas i handlingar, till exempel hur vi förhåller oss till etiska regler och lagar. God forskningssed handlar om att i forskning ställs det krav på både kvalitet i arbetet och integritet hos forskaren för att denne ska kunna ha ett reflekterat etiskt förhållningssätt i olika sammanhang. Denne måste därför ha kännedom om lagstiftning och forskningsetik. Detta gäller exempelvis att de krävs tillstånd från berörda personer för att skydda dem från skada och kränkning när integritetskänsligt material behandlas (individskyddskravet) men samtidigt får inte en försumbar skada hindra viktig forskning (forskningskravet). Andra krav är att forskare ska vara oberoende från påverkan av andra intressen.

För att säkerhetsställa att alla berörda parter blev informerade delgavs de ett informationsbrev (se bilaga 1). I brevet talade vi om vem vi var och vem vi representerade, vad studien handlade om, när och hur den skulle genomföras, syftet med studien och de metoder som skulle använda samt varför X-skolan är intressant för studien. Eftersom eleverna är minderåriga begärde vi samtycke om deltagande i studien av deras vårdnadshavare. Vi var noga med att informera att deltagande i studien var frivilligt och kunde avbrytas när som helst. Vi berättade också i informationsbrevet att vi kommer att spela in intervjuerna och därefter transkribera dem till text. Vi informerade även om att allt insamlat material kommer att förvaras på ett säkert sätt och kommer att förstöras efter det att examensarbetet blivit godkänt av examinator vid högskolan. Vi var under hela processen noga med att följa regler för god forskningssed.

Elmeroth (2008) skriver om maktordning i skola och samhälle vilket innebär att olika kategoriseringar av människor som exempelvis genus eller klass har en avgörande roll till vilken position en individ får i samhället. Med detta i åtanke kan vårt urval av elever till intervju införa normer i den befintliga klassrumsmiljön. Hade vi valt fler flickor än pojkar till efterföljande intervjuer hade vi kanske startat frågor eller spekulationer bland eleverna såsom att flickor är mer begåvade i matematik än pojkar. Av ovanstående skäl valde vi därför att intervjua lika många pojkar som flickor.

4 Resultat och analys

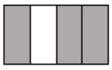
Under denna rubrik följer kvantitativa och kvalitativa resultat av skriftliga frågor och intervjuer. De presenteras och analyseras enligt de metoder som angetts under rubriken metodval.

4.1 Resultat och analys av skriftlig diagnos

I detta avsnitt presenteras resultat i tabellform samt citat från de strategier och resonemang som identifierats utifrån elevernas skriftliga motiveringar samt analys av dessa. Avsnittet avslutas med en sammanfattning av resultat och analys.

Uppgift 1

Vilket bråk föreställer det skuggade området?



Figur 4–1. Inspirerad av Behr och Post (1992).

Tabell 4–1. Lösningsfrekvenser

Svar	$\frac{3}{4}$	Summa
Frekvens	7	7

Korrekt svar: $\frac{3}{4}$ eller ”Tre fjärdedelar”.

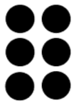
Uppgiften testar kunskaper om att uttrycka en viss andel av en helhet som symbol eller text utifrån en given bild och ger också eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använder.

Strategier:
S1 rätt: (6 elever). ” $\frac{3}{4}$”.
S2 rätt: (1 elev). ”75 % av 100 % ”.

Samtliga elever svarade korrekt med symbolen $\frac{3}{4}$. Att de svarar med symbol i stället för i text tyder på att de utvecklat förståelse för täljaren och nämnarens betydelse när en kontinuerlig (sammanhängande) helhet delas i lika delar. Uppgiften mäter inte kunskapen att uttrycka ett bråk från symbolform till bild- eller textform eller att uppfatta ett bråk som ett tal. Enligt Behr och Post (1992) är det svårare att förstå symbolen för ett allmänt bråk som har en storlek <1 (exempelvis $\frac{3}{4}$) jämfört med att förstå symbolen för ett stambråk (exempelvis $\frac{1}{4}$).

Uppgift 2

Bilden föreställer $\frac{3}{5}$ av ett antal bollar. Rita en bild som föreställer alla bollarna. **Förklara hur du tänkte.**



Figur 4–2. Inspirerad av Charalambous och Pitta-Pantazi (2007).

Tabell 4–2. Lösningsfrekvenser

Svar	10	10 men fel resonemang.	15	5	Summa
Frekvens	3	1	2	1	7

Korrekt svar: 10 bollar.

Uppgiften testar kunskapen att utifrån en känd andel av ett antal kunna bestämma hela antalet och ger också eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använder.

Strategier:

S1 rätt (1 elev). Ritade 10 bollar. ”Jag tänkte att 2 bollar = $\frac{1}{5}$”.

S2 rätt: (1 elev). Ritade 10 bollar. ” $\frac{2}{5}$ ska jag lägga till. $5 \cdot 2 = 10; 3 \cdot 2 = 6; \frac{6}{10} = 0{,}6; 10 - 6 = 4$”.

S3 rätt: (1 elev). Ritade 10 bollar. ”Varje $\frac{1}{5}$ = 2 bollar och det fanns $\frac{2}{5}$ kvar och det var redan 6 bollar + 4 nya så det blir 10 bollar”.

S4 fel: (1 elev). **”**Tänker på treans tabell fast också + 1 och ritar 9 bollar + 1 boll”.

S5 fel: (1 elev). Ritade 5 bollar och svarade $\frac{5}{5}$.

S6 fel: (1 elever). Ritade 15 bollar. ”Jag tog 3 bollar på 5 gånger”.

S7 fel: (1 elever). Ritade 15 bollar utan förklaring.

Två av de tre eleverna som svarade korrekt tänkte att det var $\frac{2}{5}$ kvar till en hel. Att dela de 6 bollarna i 3 delar för att beräkna $\frac{1}{5}$ tycktes dessa elever göra automatiskt. Den tredje eleven beräknade det hela genom multiplikation med 5 vilket kräver färre beräkningar än de som tänkte på hur stor del det fattades. Majoriteten av eleverna svarade felaktigt och använde felaktiga strategier såsom att uppfatta helheten som $\frac{5}{5}$ av 1 eller hade inte klart för sig betydelsen av nämnare och täljare. Aspekten bråk som del av en kontinuerlig eller diskret helhet är en nödvändig men inte tillräcklig förutsättning för att förstå jämförelser och division med bråk (Kilpatrick et al., 2001; Behr & Post, 1992). För att förstå denna aspekt fullständigt är det betydelsefullt att även kunna konstruera det hela utifrån en känd andel (Roche & Clarke, 2013; Behr & Post, 1992; Kilborn, 2014). Kilborn menar också att uppgifter om att tolka bråk utifrån en given bild är vanligare i undervisningen än att konstruera det hela utifrån en andel.

Uppgift 3

Vilket är störst av bråken $\frac{1}{8}$ och $\frac{1}{5}$? Förklara hur du tänkte.

Tabell 4–3. Lösningsfrekvenser

Svar	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{8}$	Summa
Frekvens	5	2	7

Korrekt svar: $\frac{1}{5}$

Uppgiften testar kunskapen att avgöra vilket av två stambråk med olika nämnare som är störst och ger också eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använder.

Strategier:
S1 rätt: Om någonting har delats i 5 lika delar är varje del större än om samma någonting har delats i 8 lika delar (2 elever).
S2 rätt: $\frac{1}{5}$ är 0,2 och $\frac{1}{8}$ (0,125) är mindre (3 elever).
S3 fel: $\frac{1}{8}$ är störst för om man delar det i en pizza t. ex blir det ju större än $\frac{1}{5}$ (1 elev).
S4 fel: $\frac{1}{8} = 8$ och $\frac{1}{5}$ är mindre (1 elev).

Resultatet visar att 5 av 7 elever använder korrekta resonemang då de jämför storleken av stambråk vilket tyder på att eleverna har fått möjligheter att utveckla sin förmåga att göra sådana jämförelser. Att använda division som strategi leder visserligen till rätt svar i uppgiften men kräver miniräknare för många andra bråk och försvårar mer utvecklade resonemang. Det är annars vanligt att elever utgår från sina erfarenheter av de naturliga talen där talet 8 är större än talet 5 och att de då felaktigt generaliserar denna kunskap till bråk. Det är inte heller självklart att de uppfattar ett bråk som ett fristående tal som har en viss storlek och kan associeras till division. Vid jämförelser kan nämnaren associeras till begreppet enhet och att täljaren anger antalet av denna enhet (femtedelar). Aspekten bråk som förhållande är grundläggande för begreppet ekvivalenta bråk och för att förstå att båda bråken måste uttryckas i samma enhet för att kunna jämföras (Behr & Post, 1992; Kilpatrick et al., 2001).

Uppgift 4

Ringa in det tal som är ungefär lika stort som $\frac{7}{8}$. Förklara hur du tänkte.

7 8 0 $\frac{1}{2}$ 1 15 -1

Tabell 4–4. Lösningsfrekvenser

Svar	1	8	0	Summa
Frekvens	3	2	2	7

Korrekt svar är talet 1.

Uppgiften testar kunskapen att uppskatta storleken av ett bråk och ger också eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använder.

Strategier:

S1 rätt: 1. (1 elev). ”Eftersom 12 · 7 = 84, $\frac{7}{8} = \frac{84}{96} \approx \frac{84}{100} = 0{,}84 \approx 1$”.

S2 rätt: (1 elev). ”För $\frac{7}{8}$ är närmst 1”.

S3 rätt: (1 elev). ”För om man ska dela $\frac{7}{8}$ så blir det ungefär 1”.

S4 fel: (1 elev). ”8 eftersom 8·10 = 80 så $\frac{1}{8}$ är 8 men det står $\frac{7}{8} = 72$”.

S5 fel: (1 elev). ”8 eftersom $\frac{7}{8}$ är närmre till 8 än det är till 7

S6 fel: (1 elev). ”0 eftersom $\frac{7}{8}$ är något med 0, inte + och inte minus och inte plus. Alltså inte under 0 och inte över 1.

S7 fel: (1 elev). ”0 eftersom det inte är en hel”.

Av eleverna svarade 4 av 7 elever felaktigt, vilket tyder på brister i förmågan att uppskatta det ungefärliga värdet av ett bråks storlek. Tidigare i uppgift 1 tolkade samtliga elever korrekt en bild där mer än hälften men mindre än hela bilden hade skuggats. Att de inte kan generalisera denna kunskap och från ett givet bråk tänka på en bild där nästan hela bilden är skuggad och associera denna bild till talet 1, kan bero på att de fått färre möjligheter att utifrån ett givet bråk rita en bild än tvärtom, men också att de inte uppfattar $\frac{8}{8}$ som det hela. Det kan även bero på att de inte uppfattar bråket som ett självständigt tal (Behr & Post, 1992; Clarke et al., 2007). De använder inte heller metoden med riktmärken enligt McIntosh (2008) och resonerar inte att bråket måste vara mindre än 1 eftersom nämnaren är större än täljaren. Bråket $\frac{7}{8}$ ger information om täljarens och nämnarens relativa storlek men även att 8 är 1 mer än 7 (absolut jämförelse) där det senare är välkänt för eleven från arbete med de naturliga talen. Den multiplikativa relationen mellan täljare och nämnare (relativ jämförelse) är ny för eleverna men nödvändig för att förstå att ett bråk är ett unikt tal som har en storlek och vad den storleken faktiskt är (Behr & Post, 1992).

Uppgift 5

Ringa in det/de uttryck som är större än 4. Förklara hur du tänkte.

$4 \cdot \frac{1}{2} \qquad 4/\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \cdot 4 \qquad \frac{1}{2}/4$

Tabell 4-5. Lösningsfrekvenser

Svar	$4/\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 4$ och $4 \cdot \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 4$	$4/\frac{1}{2}$ fel motiverat	Inget är större än 4.	Summa
Frekvens	0	2	2	1	2	7

Korrekt svar är $4/\frac{1}{2}$

Uppgiften testar kunskapen att uppskatta om storleken av en kvot eller produkt är större eller mindre än ett givet tal och ger också eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använt.

Strategier:

S1 fel: (1 elev). Svarade $4 \cdot \frac{1}{2}$ och $\frac{1}{2} \cdot 4$. ”$\frac{1}{2} = 5$ en halv, 5·4 = 80”.

S2 fel: (1 elev). Svarade $4 \cdot \frac{1}{2}$ och $\frac{1}{2} \cdot 4$. ”För att om man tar gånger blir det fler”.

S3 fel: (1 elev). Svarade $\frac{1}{2} \cdot 4$. ”$\frac{1}{2}$ = två av 4 och 2·4 = 8”.

S4 fel: (1 elev). Svarade $\frac{1}{2} \cdot 4$. ”Jag gissade bara men $\frac{1}{2} \cdot 4 = 8$ och det är ju mer än 4”.

S5 fel: (1 elev). Svarade $4/\frac{1}{2}$. ”Eftersom det blir 4 och en halv (0,5) så det är större”.

S6 fel: (2 elever). Svarade ”Inget är större än 4”.

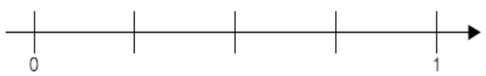
Ingen av de 7 eleverna hade kunskap om hur man kan uppskatta storleken av division med bråk mellan 0 och 1. En av eleverna angav visserligen korrekt svar men med motiveringen att $4/\frac{1}{2}$ betyder 4 + 0,5 och därmed större än 4. En anledning till de bristande kunskaperna kan vara att eleverna inte har getts möjligheter att utveckla förmågan att tolka matematiska uttryck som text (”Hur många halvor ryms i 4 hela?”). Enligt Löwing (2016) klarar endast 10 % av eleverna i årskurs 6 denna uppgift vilket skulle kunna tyda på att innehållsdivision inte prioriteras i undervisningen. Många elever tror att ”division blir alltid mindre” och ”multiplikation blir alltid större” och utesluter därför båda divisionerna direkt. Detta kan vara den mest troliga anledningen till resultatet. Uppgiften är även intressant för att undersöka förståelse för den kommutativa lagen för multiplikation och samband mellan multiplikation och division såsom att multiplikationen $\frac{1}{2} \cdot 4$ kan tolkas som texten ”hälften av fyra”. Resultatet visar att två elever felaktigt tolkade multiplikationen som ” $\frac{1}{2} \cdot 4 = 8$ ”.

Aspekten ”bråk som operator” är viktig för att förstå multiplikation. och kan förklaras som att ett bråk kan förstora eller förminska ett tal vid multiplikation, exempelvis som i multiplikationen $\frac{7}{8} \cdot 1$ som gör talet 1 lite mindre och $\frac{8}{7} \cdot 1$ som gör det lite större. Multiplikationen $\frac{8}{8} \cdot 1$ förändrar inte förhållandet eftersom (Behr & Post, 1992; Charalambous, 2007). En av anledningarna till elevernas missuppfattning kan vara att de inte har undervisats i tillräcklig omfattning eller inte alls om aspekten ”bråk som operator”.

Uppgift 6

Skriv på tallinjen ett *a* vid talet $\frac{1}{2}$, ett *b* vid talet $\frac{1}{4}$ och ett *c* vid talet $\frac{2}{4}$

Förklara hur du tänkte.

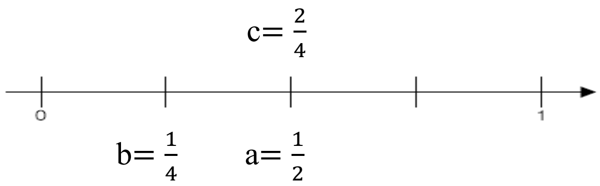


Figur 4–6. Uppgiften är inspirerad av Diamant (Skolverket, 2013) med tillägg av talet c.

Tabell 4–6. Lösningsfrekvenser.

Svar	Korrekt svar	Felaktigt svar	Summa
Frekvens	4	3	7

Korrekt svar:



Uppgiften testar kunskapen om var på en tallinje bråken $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ och $\frac{2}{8}$ ska återfinns som tal samt kunskapen att två eller flera bråk kan ha samma storlek. Den ger också eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använt. Talet *c* har lagts till den ursprungliga uppgiften som hämtats från Diagnos RB4 i *Diamant* (Skolverket, 2013), eftersom vi även vill veta hur eleverna tänker om begreppet ekvivalenta bråk.

Strategier:

S1 rätt: (1 elev). ”$\frac{1}{2}$ = halva, $\frac{1}{4}$ är halva $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ”

S2 rätt: (1 elev). ”a för det är i mitten, b det är uppdelat i 4 delar, c två fjärdedelar är en halv”.

S3 rätt: (1 elev). ” $\frac{1}{2}$ = 0,5, $\frac{1}{4}$ = 0,25, $\frac{2}{4}$ = 0,5”.

S4 rätt: (1 elev). ” $\frac{1}{2}$ är lika mycket som $\frac{2}{4}$ och det går 0,75+0,25 + 0,25 + 0,25 = 1”.

S5 fel: (1 elev). ” $\frac{1}{2}$ är hälften av 1 så det blir i mitten. Eftersom det finns 4 delar så finns $\frac{1}{4}$ en del till höger om mitten och $\frac{2}{4}$ två steg till höger om mitten”.

S6 fel: (1 elev). ” $\frac{1}{2} = 5$ en halv”.

S7 fel: (1 elev). ”Mellan varje ruta är det 25”

Av de 7 eleverna visste 4 elever att bråket $\frac{1}{2}$ är ett tal som ska markeras efter halva avståndet mellan 0 och 1 på en tallinje som är indelad i 4 delar. Att förstå begreppen hälften och dubbelt är ett kunskapskrav i årskurs 3 (Skolverket, 2016a). De tycks också förstå att $\frac{1}{4}$ är hälften av en halv och att $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Att förstå att ett bråk är ett unikt tal som kan skrivas på oändligt många sätt är nödvändigt för att förstå aspekten mätning av bråk och för att kunna jämföra bråk samt utföra räkneoperationer med bråk.

Uppgift 7

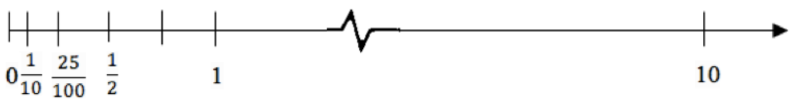
Rita en tallinje som börjar med talet 0 och slutar med talet 10. Markera sedan ungefär var du tror följande tal ligger på din tallinje. Förklara hur du tänkte.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{25}{100}$

Tabell 4–7. Lösningsfrekvenser

Svar	a, b, c rätt markerade	a , b, c fel ritat linje 0 - 100	a, b, c fel ritat linje 1 - 10	Summa
Frekvens	2	1	4	7

Korrekt svar:



Syftet är att få kunskap om elevernas resonemang och strategier när de ska placera ut bråk som alla är mindre än 1 på en tom tallinje där talen 0 och 10 ska markeras.

Strategier:

S1 rätt: Delat sträckan i 10 lika delar och markerat talet 1.

S2 rätt: Förkortat $\frac{25}{100}$ till $\frac{1}{4}$ eller omvandlat till 0,25.

S3 rätt: Visar att $\frac{1}{10}$ = 0,1. Markerar därför nära talet 0.

S4 fel: (1 elev). ”Det hela är 100 och halva är 25”.

S5 fel: (4 elever). Markerat ett eller flera av talen 1; 2,5 och 5.

Endast 2 av 7 elever förstod att samtliga bråk ska placeras i intervallet 0 – 1 och använde en kombination av strategierna S1 – S3 för att bestämma talens storlek. Majoriteten av eleverna visade bristande förståelse för att på en tallinje tolka det hela som 1 enhet av någonting. Dessa elever har i stället uppfattat de olika bråken som andelar av 10 eller 100. När eleverna själv får gradera tallinjen bekräftas resultat från forskning (Clarke et al., 2007), att majoriteten av elever i årskurs 6 har en ofullständig förståelse för bråk som tal och att de inte getts tillräckliga möjligheter att fokusera på enheten vid beräkningar med bråk.

Uppgift 8

Hur mycket pizza får varje person om 3 pizzor delas lika med 5 personer? Förklara hur du tänkt.

Tabell 4-8. Lösningsfrekvenser

Svar	$\frac{3}{5}$ + bild	Rätt bild med enhet	Ofullständigt svar	Felaktigt svar	Summa
Frekvens	1	3	2	1	7

Korrekt svar: Tre femtedels pizza per person eller $\frac{3}{5}$ av en pizza per person.

Uppgiften testar kunskap om delningsdivision där nämnaren är ett udda heltal som är större än täljaren samt ge eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använt.

Strategier:
S1 rätt: (1 elev). $\frac{3}{5}$ Och korrekt bild och enhet. ”Alla får lite mer än hälften. $\frac{3}{5}$ =0,6; 0,2 på en pizza och 0,2 · 3 = 0,6; 20 procent av en pizza på varje”.
S2 rätt: (1 elev). Korrekt bild och enhet. ”Varje person får 3 bitar av pizzan”.
S3 rätt: (1 elev). Korrekt bild och enhet. ”3 bitar för jag delar alla pizzorna i 5 för de är 5 stycken”.
S4 rätt: (1 elev). Korrekt bild och enhet. ”då får alla en del på varje pizza”.
S5 fel: (1 elev). Delat i 3 fjärdedelar och 2 åttondelar. ”Man ska äta 3 bitar för en person och jag tänkte 5·3 = 15”.
S6 fel: (1 elev). Ofullständigt svar (” $\frac{3}{5}$ ").
S7 fel; (1 elev). ”Alla får en halv och det blir en halv över”.

Av eleverna gav 4 av 7 elever ett korrekt svar men endast 1 elev svarade med symbolen $\frac{3}{5}$ och enheten pizza/person. Detta tyder på att majoriteten av eleverna inte har automatiserat tolkningen av bråk som division och måste använda andra metoder såsom bilder för att lösa uppgiften. Däremot förstår de hur delningen kan gå till praktiskt och att varje person får mindre än en hel pizza. En av elevernas bilder visade 1 pizza delad i 5 bitar där 1 bit var skuggad följt av slutsatsen att 3 pizzor då ger 3 bitar till varje person medan en annan elevs bild visade 3 pizzor där varje var delad i 5 bitar. Elevens tanke var att dela ut en bit i taget av de 15 bitarna till varje person tills de är slut och alla har fått 3 bitar. Detta är en vanlig strategi vid delningsdivision enligt Kilpatrick et al. (2001).

Uppgift 9

Hur mycket pizza får varje person om 5 pizzor delas lika med 4 personer? Förklara hur du tänkte.

Tabell 4-9. Lösningsfrekvenser

Svar	$\frac{5}{4}$ + bild	bild	Inget svar	Summa
Frekvens	2	4	1	7

Rätt svar: Alla får fem fjärdedelar av en pizza ($1\frac{1}{4}$)

Uppgiften testar kunskap om delningsdivision där nämnaren är ett jämnt heltal som är mindre än täljaren, samt att ge eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använt.

Strategier:
S1 rätt: (2elever). Svar med symbol, bild och enhet. ”Alla får en pizza var och sen $\frac{1}{5}$ av en pizza”, ”Alla får $\frac{5}{4}$ ”.
S2 rätt: (4 elever).”Varje person får 5 bitar från de 5 pizzorna”, ”De får 5 bitar för jag delar pizzorna i 4 och då får de 5”, ”Man får en pizza och en bit”, ”En person får äta 5 bitar var så det blir lika”.
S3 fel: Inget svar.

Av de 7 eleverna svarade 1 elev korrekt med bråket $\frac{5}{4}$ och visade enheten med en bild. I denna delningsdivision jämfört med delningsdivisionen i föregående uppgift blir det mer än 1 pizza till varje person ($1\frac{1}{4}$) och svårigheten är enligt Behr och Post (1992) att se detta som bråket $\frac{5}{4}$. Av de 7 eleverna klarade 6 att lösa delningsdivisionen med hjälp av en bild jämfört med 4 av sju elever i föregående uppgift. Detta kan bero på att eleverna har praktisk erfarenhet av att dela pizzor i halvor och kvartar men också på att de lär sig dessa delningar först och kanske tränar mer med dem än med delningar i ett udda antal delar. När barn lär sig att dela någonting i ett antal lika delar, måste de först lära sig att dela med ett jämnt tal innan de kan förstå delning med ett udda primtal och först därefter kan de förstå delning med tal som är produkter av primtal (Behr & Post, 1992).

Uppgift 10

Grädde säljs i förpackningar som rymmer en femtedels liter. Nellys mamma behöver 2 liter grädde till Nellys födelsedagskalas. Hur många förpackningar grädde ska hon köpa? Förklara hur du tänkte.

Tabell 4–10. Lösningsfrekvenser

Svar	10	2	4	Summa
Frekvens	3	3	1	7

Korrekt svar: 10 förpackningar.

Uppgiften testar kunskap om division där nämnaren är ett stambråk mellan 0 och 1, samt att ge eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använt.

Strategier:

S1 rätt: (1 elev). Svar = 10 förpackningar. ”5 · 2 = 10, bild”.

S2 rätt: (1 elev). Svar = 10 förpackningar. ”$\frac{1}{5} = 0{,}2;\ 0{,}2 \cdot 10 = 2$".

S3 rätt: (1 elev). Svar = 10 förpackningar. ”$0{,}2 \cdot 10 = 20$dl. 20 dl = 2 liter”.

S4 fel: (1elev). Svar = 2 förpackningar. ”5 dl · 4 = 20 dl”.

S5 fel: (1elev). Svar = 2 förpackningar. ”2 eftersom 1 förpackning rymmer $\frac{1}{5}$ och mamman behövde 2 liter”.

S6 fel: (1elev). Svar = 2 förpackningar. ”2 eftersom 02 · 5 = 1, 1+1 = 2”,

S7 fel: (1 elev) Svar = 4 förpackningar. ”femtedels + femtedels= 10dels. 10dels liter= 2 förpackning. 2 + 2 = 4”.

Av de 7 eleverna svarade 3 korrekt och tänkte då antingen att en liter rymmer 5 förpackningar eller prövat multiplikationen 0,2 · x, tills x = 10. Metoderna de använder tycks vara innehållsdivision eller sambandet mellan multiplikation och division. Strategin att byta enhet har också använts med varierande framgång. Division med bråk mellan 0 och 1 ger en kvot som är större än täljaren och detta bör förstås med innehållsdivision. Divisionen $4/\frac{1}{3}$ bör exempelvis förstås som att en helhet har delats i 3 lika delar och att det ryms 12 sådana delar i 4 helheter (Löwing & Kilborn, 2002). Endast 10 % av svenska elever i slutet av årskurs 6 klarade denna uppgift som är grundläggande och måste betonas i undervisningen (Löwing, 2016). Resultatet att 3 av 7 elever klarade att lösa uppgift 10 kan bero på att den formulerades med text som anknyter till elevens vardag i stället för att uttrycka divisionen i symboler. Att 4 av 7 elever inte visade kunskap om denna typ av problem kan ha samband med att i uppgift 5 visade ju eleverna att ingen av dem hade kunskap om hur man kan veta att kvoten $4/\frac{1}{2}$ är större än 4.

Uppgift 11

Nellys pappa ska baka bröd och behöver då 2 liter mjöl. Han har en skopa (bägare) som rymmer två tredjedels liter mjöl. Hur många skopor mjöl behöver han? Förklara hur du tänkte.

Tabell 4-11. Lösningsfrekvenser

Svar	3	1	$1\frac{1}{3}$	20	6	Ej svarat	Summa
Frekvens	2	1	1	1	1	1	7

Korrekt svar: 3 skopor.

Uppgiften testar kunskap om division där nämnaren är ett allmänt bråk mellan 0 och 1, samt att ge eleverna möjlighet att visa vilka strategier och resonemang de använt.

Strategier:

S1 rätt: (1elev). ”3 bägare eftersom då behöver man $\frac{1}{3}$ = En halv bägare mjöl för att få fram en liter mjöl.

S2 rätt: (1 elev). ”3 skoppor eftersom $0{,}66 \cdot 3 = 1{,}98$”.

S3 fel: (1 elev). ”1 för han behövde 2 l och skopan rymmde $\frac{2}{3}$ och då behöver han bara 1”.

S4 fel: (1 elev). ”Nellys pappa behöver 1 liter och $\frac{1}{3}$ liter mjöl till. $\frac{2}{3} = 0{,}67; 2 \cdot 0{,}67 = 1.33$ liter.

S5 fel: (1 elev). ”Han behöver 6 koppa mjöl och 0,2 liter. $2 \cdot 3 = 6$ skjäteldels. $6 \cdot 3 = 18; 8$ + 0,2 liter =20 liter mjöl”.

S6 fel: (1 elev). ”20 skopor. $3 \cdot 3 = 9; 10 \cdot 2 = 20; 9 + 1 = 10$”.

S7 fel: (1 elev). Inget svar.

Löwing och Kilborn (2002) menar att problem som handlar om division med bråk bör lösas genom att anknyta till en verklighet som eleven kan förstå. Trots att tanken med uppgifterna 10 och 11 var just detta, gav endast 3 av 7 elever ett korrekt svar på uppgift 10 och 2 av dem ett korrekt svar på uppgift 11. En av eleverna tycktes dock utgå från sin erfarenhet och löste uppgiften genom resonemanget: ”det går 3 halva skopor på en liter”. Uppgiften kan också lösas utan att använda matematiska symboler genom att pröva sig fram. Hur många ”två tredjedels-liter” ryms i 2 hela liter?

4.1.2 Resultat och analys av lösningsfrekvenser

Termen bristande kunskaper på uppgiftsnivå betyder i detta arbete att 3 eller färre av de 7 eleverna löste en viss uppgift korrekt. Termen tillräckliga kunskaper på uppgiftsnivå betyder då i detta arbete att 4 eller fler av de 7 eleverna löste uppgiften korrekt. Vi definierar också att termen bristande kunskaper på diagnosen i sin helhet, betyder i detta arbete att medelvärdet av samtliga elevers lösningsfrekvenser är mindre än hälften av möjliga poäng (5,5). Det vill säga att 5 poäng eller färre i denna kontext betyder bristande kunskaper och att 6 poäng eller fler betyder tillräckliga kunskaper.

Tabell 4–12. Lösningsfrekvenser per uppgift

Uppgift	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Frekvens	7	3	5	3	0	4	2	4	6	3	2

Eleverna visade bristande kunskaper i uppgifterna 2, 4, 5, 7, 10 och 11. Uppgift 2 testade kunskapen att utifrån en känd del av ett antal, bestämma hela antalet. Uppgifterna 4 och 5 testade kunskapen att uppskatta den ungefärliga storleken av ett enskilt bråk eller division. Uppgift 7 testade kunskapen att rita en tallinje mellan 0 och 10 samt markera tal mindre än 1 på denna. Uppgifterna 10 och 11 testade kunskap om innehållsdivision. Sammanfattningsvis betyder detta att i 5 av 11 uppgifter ledde valda strategier och resonemang till korrekta lösningar och 6 av 11 uppgifter till felaktiga lösningar.

Tabell 4–13. *Frekvenser för uppnådda poäng av 11 möjliga*

Uppnådda poäng	2	4	7	8
Frekvens	1	2	3	1

Medelvärde: $39/7 \approx 5{,}6$

Median: 7 (dataserie: 2, 4, 4, 7, 7, 7, 8)

Kvartilavstånd: 6

Gruppens totala resultat på diagnosen ligger väl samlat kring gruppens medelvärde. Det saknas elever med fullt uppnådda poäng (11/11) som annars hade kunnat snedvrida resultatet, så därför använder vi medelvärdet för att representera gruppen i stället för medianen. Gruppens medelvärde (5,6), ligger mycket nära gränsen för tillräckliga kunskaper (5,5).

Sammanfattningsvis visar resultaten att eleverna:

- Visade bristande kunskaper på uppgiftsnivå och tillräckliga kunskaper på diagnosen som helhet.
- Visade tillräckliga kunskaper om aspekten bråk som del av en helhet genom att de visade kunskap om att tolka en bild av en andel av en helhet som symbol eller text men visade bristande kunskaper om att utifrån en känd andel av ett antal bestämma hela antalet.
- Visade tillräckliga kunskaper om att avgöra vilket av två stambråk med olika nämnare som är störst men bristande kunskap i att avgöra om en kvot eller produkt är större än ett givet tal.
- Visade tillräckliga kunskaper om ekvivalenta bråk genom att visa på en tallinje att en halv är lika med två fjärdedelar.
- Visade bristande kunskaper i att uppskatta den ungefärliga storleken av ett enskilt bråk eller kvot. Någon elev gjorde absoluta jämförelser av täljare och nämnare och de relativa jämförelser som gjordes var relaterade till omskrivning till decimalform och inte till riktmärken såsom 0, $\frac{1}{2}$
- Visade tillräckliga kunskaper om var hälften och fjärdedelen av 1 ligger på en förgraderad tallinje men visade bristande kunskap om att markera bråk mellan 0 och 1 på en ograderad tallinje mellan 0 och 10.
- Visade tillräckliga kunskaper om delningsdivision men bristande kunskaper om att ett bråk är ett tal vars storlek är lika med kvoten mellan täljare och nämnare.

- Av eleverna svarade 6 av 7 korrekt vid delningsdivision med ett jämnt tal men denna andel sjönk till 4 av 7 vid delningsdivision med ett udda tal. Av eleverna svarade 3 av 7 korrekt vid innehållsdivision med stambråk Denna andel sjönk till 2 av 7 vid innehållsdivision med ett allmänt bråk (täljaren >1).
- Visade bristande kunskaper om innehållsdivision.
- Resultatet visar att eleverna visade tillräckliga kunskaper på en skriftlig diagnos eftersom medelvärdet av deras uppnådda poäng (5,6), låg strax över medelvärdet av antalet möjliga poäng (5,6 respektive 5,5). De visade sammanfattningsvis tillräckliga kunskaper om aspekten bråk som del av en helhet och bristande kunskaper om aspekten kvot samt om innehållsdivision.

4.2 Resultat och analys av intervjuer med elever

Syftet med intervjuerna är att få en djupare förståelse för orsaker till att vissa av de strategier eleverna använde i den skriftliga diagnosen ledde till korrekta lösningar och att andra strategier inledde till felaktiga sådana. Detta kan bero på vilka möjligheter de har fått att lära sig om bråks aspekter samt om jämförelser och division med bråk. Vi ville också med intervjuerna ge eleverna möjligheter att utveckla hur de hade tänkt när de löste uppgifterna. I detta arbete benämns följande fingerade namn till eleverna: *Alf*, *May*, *Bo* och *Ida*.

4.2.1 Vad upplever eleverna att de kan?

Under denna rubrik presenteras och analyseras elevernas svar under de enskilda intervjuerna. Dessa presenteras i kategorier som består av ett eller flera av de teman som identifierades efter transkribering av intervjuerna. Följande kategorier framträdde: Svårt och enkelt, Jämföra och bedöma storlek med bråk, Bråk på tallinjen samt division med bråk. Temana växte fram utifrån elevernas svar på de frågor som de besvarade under intervjuerna.

Svårt och enkelt

”Ett enkel, fyra fem svår, kan inte förklara för kompis” (Alf).

”Sex enkel, två dubblar 3 gånger, fyra, fem svår. Gjort ett och sex på diagnos och tester” (May).

”Ganska lätt, åtta svårast, svårt att dela med 5 där. Försökte med 4, sen 5, fick ihop det.” (Bo).

”Mitt emellan svår. Gick bra fast jag ibland har svårt att förklara, ibland säger jag svaret muntligt. Känner igen uppgift 1 och 3 och andra. På uppgift 2 tänkte jag 3 gånger 3 = 9 och

plussade 1. Kanske uppgift 4 svårast, tänkte att 1 delat på 8 var 8 liksom en 8+8+8 och så står det här att 7/8 är lika med 72. Osäker men ringade in 8. Tänkte på åttans tabell och att hälften av 10 är 0,5 och att det var helt kört." (Ida).
Eleverna kände igen många uppgifter och menade att uppgifternas svårighetsgrad varierade från lätta till svåra.

Jämföra och bedöma storlek med bråk

"Ja skriftligt eller bild, facit kan stå 5 pizzor är ⅕" (Alf).

"Jämfört två bråk eller fler" (May).

"Jag tror vi fått göra det i femman. Bestämt storlek, vet att 8/7 >1 osv" (Bo).

"Känner igen sådana uppgifter" (Ida).

Uppgift 3 testade kunskap om vilket av två stambråk med olika nämnare som var störst. Av 7 elever svarade 5 korrekt på denna uppgift och i intervjugruppen var det endast Ida som inte svarade korrekt på diagnosen. Elevernas muntliga svar bekräftar att de har fått möjlighet att utveckla sin förståelse för hur man kan avgöra vilket av två stambråk med olika nämnare som är störst.

Uppgift 4 testade elevers förmåga att uppskatta ett bråks storlek. Av 7 elever gav 3 ett korrekt svar. De muntliga svaren bekräftade att de hade fått möjlighet att utveckla sin förståelse av att jämföra och bedöma bråks storlek. Bo berättade inte hur han visste att 8/7 >1. Vid jämförelser med bråk är det viktigt att kunna uppskatta storleken av ett bråk med hjälp av riktmärken (McIntosh, 2008). Detta kräver i sin tur en förståelse för hur man kan gör relativa jämförelser mellan täljare och nämnare samt att förstå aspekten bråk som förhållande. Begreppet ekvivalenta bråk är viktigt för att förstå hur olika bråk kan förlängas eller förkortas för att få samma nämnare eller enhet (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Behr & Post, 1992).

Uppgift 5 testade om eleverna kunde avgöra om en division eller multiplikation var större eller mindre än 4. Ingen av de 7 eleverna gav ett korrekt svar på diagnosen. Alf berättade "[…] fem svår, kan inte förklara för kompis", men i övrigt fick vi inga kommentarer. Uppgiften kräver att eleverna förstår att en kvot blir större än täljaren då nämnaren är ett tal mellan 0 och 1 (Mårtensson, 2015) och att en division alltid kan skrivas om som en multiplikation och tvärtom men också att en division kan uppfattas som ett bråk och att samma relativa jämförelser mellan täljare och nämnare kan göras i en division för att uppskatta kvotens storlek. Den kommutativa lagen för multiplikation måste också förstås. (Kilpatrick et al., 2001; Behr & Post, 1992).

Bråk på tallinjen

”Jobbar vi alltid med men med decimaltal 1 - 10, sätt ut 5 och så” (Alf).

”Haft det på tester, man får gissa var de ska ligga, vad som ligger emellan. Inga genomgångar” (May).

”Jobbat i fyran placerat ut tal” (Bo).

”Ja tror det för vi har jobbat mycket med tallinje” (Ida).

Uppgift 6 testar förståelse av att placera bråk i rätt ordning på en tallinje med längden 1 och delad i 4 delar. Uppgiften testar även elevers förståelse av ekvivalenta bråk. Av de 7 elever som gjorde diagnosen gav 4 av dem korrekta svar inklusive Alf och Bo. Intervjusvaren visade att de hade fått möjligheter att utveckla sin förståelse av tallinjen med start i årskurs 4, däremot mest med decimaltal enligt Alf.

Uppgift 7 testar förståelse av att markera bråk på en tallinje som eleverna själva ska gradera från 0 till 10. De bråk som ska placeras i ordning är alla mindre än ett. Av de 7 elever som skrev diagnosen svarade 2 av dem korrekt inklusive Bo som inte utvecklade sina tankar ytterligare i intervjun. Intervjusvaren visade samma som i uppgift 6. Löwing och Kilborn (2002) menar att det är viktigt att eleverna lär sig bråk innan de lär sig om decimaltal för att förebygga missuppfattningar. Tiondelar, hundradelar och så vidare är bråk som har en stark koppling till positionssystem, mätningar med en viss noggrannhet och decimaltal. Enligt Behr och Post (1992) tycker barn att det är svårt att koppla bråk som ett tal till en tallinje, men att det är lättare om tallinjen är förgraderad och visar att avståndet mellan 0 och 1 har delats i ett jämnt antal delar.

Division med bråk

”Innan med liter” (Alf).

”Vet inte om vi delat med liter, haft cirklar, uppgift fem tänkte liter delade i 5 för det är 1 och tar 1/5 för det är 5. Några uppgifter om hur mycket får plats, hela kap1 är bråk” (May).

”Någon gång i sexan på papper” (Bo).

”Bråk har vi redan gjort, nu är jag på division typ 3,5 delat med 10” (Ida).

Uppgifterna 8 och 9 behandlar delningsdivision och uppgifterna 10 och 11 innehållsdivision. De testar elevernas förmåga att lösa textproblem om division. I uppgift 8 testas kunskapen att dela en pizza i ett udda antal lika delar när det finns fler personer än pizzor och i uppgift 9 testas elevernas kunskap att dela en pizza i ett jämnt antal lika delar när pizzorna är fler än antalet personer. I uppgift 8 gav 4 elever inklusive May, Alf och Bo ett korrekt svar, medan i uppgift 9 ökade lösningsfrekvensen till 6 elever inklusive Ida, May, Alf och Bo. Angående innehållsdivision där samtliga visade bristande kunskaper, går det inte att dra några slutsatser om de hade fått möjligheter att utveckla förståelse för detta. Den höga lösningsfrekvensen i uppgifterna 8 och 9 visade däremot att de fått möjligheter att utveckla sin förståelse av delningsdivision och så visade även intervjusvaren (Alf och May).

De matematiska idéer som förenar bråkens olika aspekter är enligt Carpenter et al. (2012) delning, kvantitet och enhet. För att förstå rationella tal måste man för det första ha en grundläggande kunskap om de fyra räknesätten med naturliga tal och en förståelse av begrepp inom mätning (Behr & Post, 1992). Att förstå division med bråk kräver enligt Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) en förståelse av bråk som del av en helhet samt förmågan att kunna associera till bråk som ett unikt tal som kan tolkas som en division, men även förståelse av aspekterna förhållande, operator och mätning. Division där nämnaren är ett bråk mellan 0 och 1 bör enligt Löwing (2016) lösas med innehållsdivision.

Eleverna upplever att de fått möjlighet att utveckla förståelse av att:

- Uttrycka en del av en helhet som en symbol utifrån en given bild av en helhet
- Konstruera en helhet utifrån en given andel av helheten
- Att bestämma vilket av två stambråk som är störst
- Att uppskatta storleken av ett stambråk
- Att lösa problem om innehållsdivision och delningsdivision med betoning på delningsdivision.

4.2.2 Hur upplever eleverna vilka möjligheter de fått?

Under denna rubrik presenteras och analyseras elevernas svar enligt de teman som identifierades efter transkribering av intervjuerna och som sammanfattas i kategorierna: om genomgångar i helklass, om individuellt arbete, om arbete i par eller grupp, inställning till matematik och bråk, om stöd utmaningar och bedömning, och om laborativa och digitala hjälpmedel.

Om genomgångar i helklass

”Oftast enskilt” (Alf).

”Först har vi genomgång, sen som vanligt. Det finns steg 1 - 4 i matteboken i varje kapitel (May).

”Innan var det en gång i veckan när de skrev ett tal på stora tavlan och vi hade små böcker där vi skrev” (Bo).

”Alltid genomgång när vi skulle börja på ny del typ 1.1 för att vi skulle veta lite innan vi börja steg 1 – 3 (Ida).

Om genomgångar i helklass menar Alf att de mest arbetar enskilt. May förtydligar detta och menar att det förekommer inför varje nytt kapitel vilket Ida också berättar. Vad Bo menar med innan framgår inte men när vi intervjuade Alf om vad han tycker om matematik, berättade han att det var i fjärde klass de jobbade på det viset med problemlösning,

Om individuellt arbete

”Oftast enskilt i matteboken, extrauppgifter när man är klar” (Alf.).

”Jobbar med mattebok, typ alltid enskilt, är oftast på samma tal i boken” (May),

”Vi sitter själva och jobbar” (Bo),

”Vi har mattebok vi gör uppgifter från och en liten bok som vi skriver i”. (Ida).

Om arbetsformer menar Piaget å ena sidan att barn lär sig efterhand de utvecklar sina kognitiva förmågor genom att upptäcka världen på egen hand. Tidigare läroplaner feltolkades av en del lärare som menade att eleven inte behöver den vuxnes stöd annat än som passiv handledare (Säljö, 2014). Å andra sidan menar Vygotskij i sin sociokulturella teori att barn lär sig i ett socialt sammanhang.

Om arbete i par eller grupp

”Problemlösning ibland i par men mest enskilt” (Alf).

”Aldrig par eller grupp. Tycker bäst om att arbeta själv. OK med grupp om lärare hade sagt så, läraren bestämmer ju (May).

”Vi sitter själva och jobbar, kanske någon gång i grupp, kanske en gång per termin. Ibland får man diskutera med kompisar om alla är på samma tal” (Bo).

”I just matte nej. Ibland kollar alla på tavlan men vet inte om det räknas som grupp. I par inte nu i alla fall. Innan kommer jag inte ihåg” (Ida).

Av Idas berättelse framkommer att de arbetar i par eller grupp i andra ämnen men inte i matematik. Arbetsformer består huvudsakligen av enskilt arbete, blandat med genomgång på tavlan för alla ibland. May menar att det hon bäst tycker om är att jobba själv. Enligt Vygotskijs sociokulturella teori sker lärande inte direkt från en observation hjärnan, utan sker via någon form av medierande verktyg där språket är det viktigaste. Verktyg kan också bestå av exempelvis text, bild, symboler eller något föremål vilket McIntosh (2008) beskriver med sin tanketavla. I Vygotskijs teori är tanken om den proximala utvecklingszonen central. Den innebär att läraren först kartlägger och ser till att en viss elev har den nödvändiga delkunskap om ett begrepp som krävs för att förstå nästa del av begreppet. Därefter sker lärande av nästa förståelsenivå om begreppet genom att läraren tillsammans med mer kompetenta kamrater ställer utmanande frågor till eleven i ett interaktivt samspel där eleven får förklara för de som inte förstår och motivera för de som förstår (Säljö, 2014; Kilpatrick et al., 2001). Vid formativ bedömning för lärande är Vygotskijs sociokulturella teori central (Lundahl, 2001) – likaså i läroplanen Lgr 11 (Säljö, 2014).

Inställning till matematik och bråk

Matematik

”Roligt, gillar problemlösning för det är klurigt, frågor mycket text där man får tänka, ibland par oftast enskilt, oftast jobba i matteboken, extrauppgifter, mer problemlösning hade varit roligt, och om man hade jobbat två och två och gett varandra olika uppgifter” (Alf).

”Roligt, kul när man förstått, jag skulle vilja ställa upp tal i stället för huvudräkning och visa hur man tänker” (May).

”Ganska roligt som det är” (Bo).

”Roligt när det går bra. Kan man inte så räcker man upp handen så frågar de om man kan det själv. Jag tycker vi ska använda mer klossar för det visar också mer hur man räknar och för mig förklarar det mer för då ser man hur man räknar” (Ida).

Bråk

”Vet inte vad jag tycker om det, inte så bra på det. Jobbat med det lite i fyran, mest i femman och i början av sexan kapitel 1.1 och så. Jobbade först med procent sen ¼ och så. Vi har lärt skriftligt men ibland med bild. Roligare med decimaltal de är enklare (Alf).

”Lärt ställa upp bråk och bråkform, känner igen uppgift 1, vissa på tester, lite svårt, roligt när man tar hur många går in i dem, senast i början i sexan” (May).
”Sådär, inte det roligaste. I fyran då lärde jag bråk, i femman bråk plus bråk” (Bo).
”Jobbat mycket med bråkform och decimalform och nu med decimalform. Bråk har vi redan gjort. Nu är jag på andra uppgifter där det är blandat typ 3,5/10. Jag kan ju bråk när det inte är så svårt men visar inte hur jag räknar för man kollar i facit. Tycker det går bra ibland” (Ida).

Alf berättar att han saknar att få arbeta med problemlösning och Ida saknar att få arbeta med laborativt material. Samtliga elever tycker matematik är roligt. Problemlösning är den förmåga som kräver förståelse av samtliga aspekter av bråk (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Problemlösning är både en egen förmåga och ett avsnitt i det centrala innehållet i matematik (Skolverket, 2016a) vilket tyder på vikten av denna förmåga. Kilpatrick et al. (2001) betonar kompetensen problemlösning som ett integrerande sätt att utveckla andra kompetenser såsom att förstå metoder och begrepp och att i resonemang kunna förklara och motivera sina och andra lösningar och strategier. Löwing (2016) betonar också samma förmågor och resonerar att det är omöjligt att resonera och lösa problem som handlar om begrepp man inte förstår. Angående Idas önskan att få arbeta med klossar skriver Kilpatrick et. al att laborativa hjälpmedel är viktigt att arbeta med, men kräver noggrann planering av läraren. Löwing och Kilborn (2002) samt Bulgar (2003) menar att bråk blir lättare att förstå om problemet utgår från elevernas verklighet.

Samtliga elever tycker att matematik är roligt i kontrast till arbete med bråk som Alf, Ida och May upplever som svårt. May verkar tycka bättre om innehållsdivision med bråk. Bo tycker att bråk inte är särskilt roligt och Alf berättar att det är roligare med decimaltal och att de fått arbeta med att uttrycka bråk i bild. Enligt Kilpatrick et al. (2001), är det viktigt för lärandet att elever har en tilltro till sin egen förmåga men förutom självförtroende krävs även en uppfattning att matematik är viktigt, intressant och betydelsefullt för elevens verklighet och inte enbart någonting de måste arbeta med i skolan. Detta uttrycks i kursplanen för matematik som att undervisningen om bråk ska utgå från elevens verklighet (Skolverket, 2016a).

Om stöd utmaningar och bedömning

”Kan man inte så räcker man upp handen så frågar de om man kan det själv” (Ida).

”Om det är ett tal i bråkform som alla inte kan tar läraren upp det. Ibland när det inte är diagnos och förstår inte eller får olika svar då kan man kolla tillsammans och göra om talet” (May).

”De visar alltid på tavlan. Ibland får vi gå fram om vi räcker upp handen. Är det fel hjälps vi åt allesammans. Jag tycker vi ska använda mer klossar för det visar också mer hur man räknar och för mig förklarar det mer för då ser man hur man räknar” (Ida).

”Ganska sällan prov, ja det är väldigt sällan. Rättar själv med facit, i början 4 o 5 rättade läraren våra böcker men nu får vi själva ta ansvar för oss själva, det funkar bra att rätta själv men vissa orkar inte göra om uppgiften om den är fel” (Alf).

”Facit rättar själva, läraren sällan, går ibland runt och frågar eller hjälper, om många inte förstår så gemensamt på tavlan” May.

”Det finns facit längst bak i boken men man måste ha uträkning så man inte fuskar. Rättar själv men läraren kollar uträkning och rättar diagnoserna” (Bo).

”Ja det är mycket prov så man måste ha papper och penna. Är det tre delar rättar vi själva del ett. När det är diagnoser rättar lärarna för de vill kolla. Om man ha några fel står det vilka sidor man ska öva på, sen rättar läraren dessa uppgifter” (Ida).

Idas och Alfs berättelser tolkar vi som att diagnoser förekommer ofta och prov mer sällan. Detta tyder på att formativ bedömning (Lundahl, 2011) förekommer. May berättar om hjälp men utvecklar inte vad hjälpen består av. Elever ska ta ansvar för sitt eget lärande enligt läroplanen Lgr 11. Läraren har samtidigt en skyldighet att se till att varje elev får de möjligheter att lära som krävs för att klara kunskapskraven (Skolverket, 2016a). Vi uppfattar att elevernas lärande styrs mer av Piagets teorier än av Vygotskijs (Säljö, 2014).

Om laborativa och digitala hjälpmedel

Laborativa

”Klossar men mest i början bråk och decimaltal, inte nu, jobbar själv med dem. Läraren visar inte” (Alf).

”Hade bara i trean, använt små kuber och delat in dem” (May).

”Ibland visat med grejer, mest på papper, kommer inte på” (Bo).

”Minns i femman små klossar, vet inte om bråk eller decimaltal, vi skulle jämföra och lägga ihop. Nu skriver vi på papper och räknar, skriver bara, undervisar och lär oss och så. Jag tycker vi ska använda mer klossar för det visar också mer hur man räknar och för mig förklarar det mer för då ser man hur man räknar” (Ida).

Digitala hjälpmedel

”I så fall miniräknare annars inget” (Alf).

”Nej vi skriver bara i matteboken” (May).

”Nej” (Bo).

”Nej vi får inte använda dator Ipad eller miniräknare. Det ska man inte heller. Vi använder våra hjärnor och skriver ner på papperet" (Ida).

Sammanfattning

Eleverna upplever att de fått möjlighet att lära sig på följande sätt:

- Arbetsformen individuellt arbete med läroboken används i mycket hög utsträckning.
- Genomgångar i helklass förekommer inför nya kapitel i läroboken.
- Arbete i par eller grupp är sällsynt.
- Eleverna tycker matematik är roligt.
- Elevernas kunskaper bedöms med en diagnos efter varje kapitel i läroboken.
- Det finns önskemål om att få arbeta mer med problemlösning och laborativa aktiviteter.
- Eleverna menar att bråk är svårt och inte så roligt som matematik är i övrigt.
- Eleverna menar att procent är lättare och roligare.
- Digitala hjälpmedel förekommer sparsamt.
- Eleverna upplever att de fått möjlighet att utveckla förståelse av att: Uttrycka en del av en helhet som en symbol utifrån en given bild av en helhet; Att konstruera en helhet utifrån en given andel av helheten; Att bestämma vilket av två stambråk som är störst; Att uppskatta storleken av ett stambråk och att lösa problem om innehållsdivision och delningsdivision med betoning på delningsdivision.

4.3 Resultat av skriftliga svar från lärare

I detta avsnitt citeras det skriftliga svar som gavs gemensamt av klassens två lärare. I detta arbete har de fått två följande fingerade namn: *Åsa* och *Åke*.

1. Kan du berätta om VAD eleverna har getts möjligheter att lära sig om bråkens aspekter, samt jämförelser och division med bråk?

Inför varje nytt område inom bråk har vi startat upp med noggranna genomgångar och där efter mindre grupper/individuell nivå

Färdighetsträna i boken

Hemuppgifter

Vi erbjuder laborativt material

(Åsa och Åke)

2. Kan du berätta om HUR eleverna har getts möjlighet att lära sig om bråkens aspekter, jämförelser och division på lektionerna?

När vi har suttit ner med elever, har de fått förklara hur de tänker.

På genomgångar har eleverna fått förklara och visa på tavlan.

(Åsa och Åke)

3. Är bråk något som elever brukar uppfatta svårt tycker du?

Ja, det är det. Majoriteten tycker att det är svårt och en del tycker det är mycket svårt.

(Åsa och Åke)

4. Hur skulle du beskriva en optimal matematiklektion?

Små grupper så att man hinner hjälpa och få tid till alla elever.

Två pedagoger på en klass vid varje mattelektion.

Att alla har tillgång till digitalt verktyg eftersom det är lättare att nivåanpassa.

Laborativt material.

(Åsa och Åke).

5. Känner du att där är något som begränsar din undervisning?

I dagsläget är det brist på digital utrustning

(Åsa och Åke).

4.4 Analys av skillnader och likheter i elevers och lärares intervjusvar

Likheter i elevernas upplevelser och lärarnas skriftliga svar av sina upplevelser:

- Eleverna har fått möjligheter att utveckla kunskaper om bråk genom att för det mesta arbeta individuellt med läroboken.
- Eleverna upplever att genomgångar i helklass är en arbetsform som används för att introducera nya kapitel i lärobok och resonera om olika lösningsstrategier.

- Elevernas kunskaper bedöms med en diagnos efter varje kapitel i läroboken.
- Eleverna upplever att det finns tillgång till laborativt material.
- Eleverna upplever att matematik är roligt men att bråk är svårt.

Skillnader i elevernas upplevelser och lärarnas skriftliga svar av sina upplevelser är:

- Vissa elever upplever att de inte ska använda digitala verktyg i sitt arbete eftersom de upplever att de ska använda huvudräkning och motivera sina lösningar, medan lärarna önskar att det fanns tillgång till digitala verktyg.
- Vissa elever upplever att de saknar att arbeta i grupp med problemlösning och att ställa frågor till varandra i par, medan andra upplever att de helst arbetar enskilt.

5 Diskussion

I detta avsnitt diskuteras både metod och resultat.

5.1 Metoddiskussion

Vi använde en flermetodsforskning eftersom detta arbetes frågeställningar krävde data i form av både siffror och text. Av elevdiagnosen fick vi mycket information om elevers kunskaper och även bra beskrivningar om hur de gått tillväga. Eleverna gav även utförliga svar i efterföljande intervjuer. Dock var det en nackdel att lärarintervjuerna ändrades från muntlig till skriftlig. Detta medföljde inte så utförliga svar och chans till eventuella kompletterande följdfrågor försvann. Detta kan ha påverkat resultatet då vi inte fick hela bilden från lärarnas synvinkel. En synpunkt angående vårt metodval kan vara den nackdel vi tidigare lyfte angående svårigheten att analysera data som samlats in med skilda metoder. Med detta i åtanke kan resultaten ha påverkats då vi är studenter som är ovana att analysera och tiden för att lära var bristfällig. Dock menar vi att de flesta studenter som genomför examensarbete är oerfarna att analysera data oavsett vilket metodval. Att vi dessutom var två vägde upp vårt metodval och resulterade i att det var genomförbart. Samtidigt vägs det även upp att blanda metoder då Bryman (2011) förklarar en kritisk punkt inom den kvantitativa forskningen som innebär att denna typ av mätning kan ses som bristfällig då det saknas precision och riktighet. Vidare beskriver Bryman hur betydelsefullt det är att de viktigaste begreppen i en enkät uppfattas på samma sätt av de personer som ska svara på frågorna. En lösning på detta kan vara att ha fasta svarsalternativ, men detta skulle inte passat in i vår diagnos då vi ville se hur eleverna resonerar på de olika uppgifterna. Vidare förklarar Bryman att när diagnosen genomförs är det inte möjligt för eleverna att fråga om hjälp ifall där är någon fråga de inte förstår, vilket kan leda till att respondenterna kanske hoppar över dessa eller svarar felaktigt på grund av den bristande förståelsen. En annan fördel Bryman lyfter är att en kompletterande kvalitativ intervju medför att eleverna kan fördjupa sina svar vilket vi anser kan ha påverkat resultaten positivt. För att spara tid övervägde vi dock att enbart intervjua eleverna och i så fall låta dem lösa uppgifterna under intervjuns gång. Denna metod var vad Clarke et al. (2007) valde men vi menar att denna metod inte var möjlig i denna studie, framför allt på grund av vår bristande kunskap och erfarenhet. Däremot, för att få veta vad elever och lärare upplevde om vilka möjligheter eleverna hade fått att utveckla förståelse om bråks aspekter, jämförelser och division med bråk – då såg vi inga andra alternativ än intervju och därmed flermetodsforskning.

Kvale och Brinkmann (2014) förklarar att en intervju kan se olika ut beroendes på vilka förkunskaper intervjuaren har. När eleven förklarade sitt tillvägagångssätt under intervjun var det ibland svårt för oss att hitta passande följdfrågor som följde upp deras resonemang. Med mer yrkeserfarenhet hade det varit enklare för oss att genomföra dessa intervjuer. Samtidigt kan det vara en fördel att vi inte har yrkeserfarenhet då det hade kunnat leda till förutfattade uppfattningar och på så vis snedvrida resultaten.

Precis som vissa elever tycker det är en utmaning att uttrycka sina tankar skriftligt, kan vissa elever ha svårigheter med att förklara detta muntligt. Vi kände under intervjun att den skriftliga diagnosen var till stor hjälp för att se hur eleverna tänkt, eftersom svaren på många av uppgifterna var väldigt tydliga och utförliga. Efter att ha genomfört intervjun kände vi att endast en muntlig intervju inte hade gett oss tillräckligt med underlag för att kunna analysera elevernas förståelse för bråk. Bryman (2011) poängterar den sociala önskvärdheten som är en annan kritisk aspekt gällande den muntliga intervjun. Detta innebär att eleverna svarar det de är önskvärt för oss att höra, alltså de svar de tror anses vara rätt, istället för det de faktiskt tycker och tänker som de tänker kanske är mindre önskvärt. Detta kan ha påverkat resultaten negativt.

Bryman (2011) skriver om respondentvalidering som innebär att de personer som medverkar i det som studerats tar del av resultatet och bekräftar att forskaren uppfattat verkligheten rätt. Detta hade varit önskvärt att låta framförallt lärarna genomföra, med tanke på att vi inte hade möjlighet till följdfrågor eftersom de svarade skriftligt. Trovärdigheten i studien hade då stärkts enligt Bryman. Vårt val att redovisa samtliga citat istället för enstaka kanske kompenserade och höjde kvaliteten?

För att besvara frågan om vilken kunskap eleverna har om bråks aspekter samt jämförelser och division med bråk måste eleverna visa sin kunskap om detta på något sätt. En beprövad metod är då att konstruera en skriftlig diagnos. Enligt Löwing (2016) kräver detta ett teoretiskt ramverk och att uppgifterna är noggrant utprövade i praktiken. Löwing beskriver i sin studie hur det formativa diagnosmaterialet (Skolverket, 2013) har konstruerats och utprövats. Materialet bygger på den ämnesdidaktiska teori som diskuteras i Löwing (2016) och valet av diagnostiska uppgifter är inspirerade av tidigare forskning. Även i andra studier om bråks aspekter och olika beräkningar har det konstruerats diagnoser där metoden för att konstruera uppgifterna har varit inspirerarad av teorier och metoder från tidigare forskning (Clarke et al., 2007; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, Karlsson, 2015). Av dessa skäl valde vi att konstruera en diagnos med samma metoder som använts i tidigare studier och menar att detta bidrar till en högre reliabilitet i studien.

5.2 Resultatdiskussion

I detta kapitel diskuteras resultat i relation till teori och tidigare forskning om elevers kunskaper om bråks aspekter och deras samband med jämförelser och divisioner med bråk. Därefter diskuteras både elevers och lärares syn på de möjligheter elever fått att utveckla sådan förståelse. Kapitlet avslutas med några reflektioner om hur elevernas kunskaper om detta skulle kunna förbättras och det ges förslag på framtida forskning.

Syftet med föreliggande studie är förutom att undersöka elevernas kunskaper, även att undersöka vilka möjligheter eleverna upplever de fått och lärarna att de gett eleverna att utveckla förståelse av bråks aspekter och om jämförelser och divisioner med bråk. För att få att få en så detaljerad kvalitativ information som möjligt om orsaker till att vissa strategier leder till korrekta lösningar och andra till felaktiga sådana skrevs texten ”**Förklara** hur du tänkte” i varje uppgift. Syftet med detta var att de elever som har svårt att formulera sig skriftligt skulle ges möjligheter att utveckla tankar om sina lösningsstrategier i en kommande enskild intervju. Av det skälet diskuteras resultat utifrån kategorier som sammanfattar de teman som analysen identifierade: ”Svårt och enkelt” ;”Uppskattningar av bråks och kvoters storlek”; ”Jämförelser med bråk”; ” Bråk på tallinjen”; ”division med bråk” samt ”Laborativa aktiviteter och digitala hjälpmedel”.

5.2.1 Vilka kunskaper visar elever om bråks aspekter? Finns det samband med jämförelser och division?

Studiens resultat visar bland annat att eleverna visar tillräckliga kunskaper om aspekten bråk som en lika del av ett antal men bristande kunskaper om aspekten kvot och om att bråk är ett tal som har en storlek lika med kvoten mellan täljare och nämnare. Kunskaper om bråk som del av ett antal ingår i kunskapskraven för årskurs 3 (Skolverket, 2016a) och är därför ett förväntat resultat. Bristande kunskaper om aspekten kvot tycks däremot medföra bristande kunskaper även om innehållsdivision. Bristande kunskaper om aspekten operator tycks medföra bristande kunskaper även om relativa jämförelser. Dessa resultat pekar på att det kan finnas samband mellan förståelse av aspekten operator och kunskapen att uppskatta storleken av ett bråk eller en kvot och att göra relativa jämförelser mellan täljare och nämnare. Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) menar att förutom aspekten bråk som del av en helhet, kan division förstås utifrån aspekten kvot. Multiplikation eller beräkningar av en viss andel av en kvantitet kan förstås utifrån aspekten operator. Operationerna förlänga, förkorta och multiplikation kan förstås utifrån aspekten förhållande medan addition kan förstås utifrån aspekten mätning. Även Behr och Post (1992) menar att aspekten bråk som en operator är nödvändig att ha kunskap om för att förstå multiplikation och dess samband med division samt för att kunna uppskatta storleken av ett bråk eller en kvot genom relativa jämförelser av täljare och nämnare. Eleverna i denna studie visade bristande kunskap om relativa jämförelser när de skulle uppskatta storleken av ett bråk eller en kvot. En vanlig missuppfattning som några elever visade är att generalisera kunskaper om regler för att jämföra naturliga tal och att sedan använda samma absoluta jämförelser för att uppskatta storleken (Behr & Post, 1992).

Eleverna visade å ena sidan tillräckliga kunskaper om att tolka en andel av en helhet från en bild till en korrekt matematisk symbol, vilket tyder på att de har kunskap om täljarens betydelse som antal och nämnarens som enhet. Å andra sidan kräver en fullständig förståelse av aspekten bråk som lika delar av en helhet också förståelse av hur en helhet kan återskapas utifrån dess delar. Denna kunskap utgör enligt Kilpatrick et al. (2001) grunden för att förstå division och multiplikation. I studien visade eleverna bristande kunskap om att återskapa en helhet utifrån en känd andel av ett antal. Denna typ av kunskap är enligt Kilborn (2014), mindre förekommande i kursplanen för matematik (Skolverket, 2016a) Han menar att kunskaper om bråk och deras olika aspekter och uttrycksformer har tonats ned i kursplanen i matematik eftersom de inte förekommer så ofta i elevers vardag.

5.2.2 Är elevers strategier framgångsrika vid jämförelser och division med bråk?

Resultaten visar att den undersökta elevgruppens kunskaper var blandade och att deras strategier och resonemang ofta ledde fel trots att de visade tillräckliga kunskaper på diagnosen i sin helhet. De strategier som oftast ledde till felaktiga svar var förmågan att avgöra den ungefärliga storleken av ett bråk eller en kvot men också förmågan att uppskatta om ett givet bråk var större än eller mindre än ett givet tal (riktmärke). Strategin med riktmärken beskrivs av bland andra McIntosh (2008). Att elevernas strategier ledde fel kan bero på att de inte fått möjligheter att utveckla förståelse av dem. Detta i sin tur kan bero på olika ramfaktorer (Lundgren, 2014) i form av bristande tid för planering samt bristande ekonomi för fortbildning, som begränsar lärares möjligheter att planera aktiviteter som hjälper elever att identifiera och förebygga kända svårigheter och missuppfattningar. Dessa svårigheter och missuppfattningar är välkända och har behandlats i teorier av bland andra Behr och Post (1992) och studier av Charalambous och Pitta-Pantazi (2007) samt Clarke et al. (2007). Kända svårigheter och strategier som leder till lyckade problemlösningar såväl som misslyckade sådana har också beskrivits i forskningsöversikter (Kilpatrick et al., 2001; Cramer et al., 2009) samt i böcker om matematikdidaktik (Löwing & Kilborn, 2002; McIntosh, 2008; Carpenter et al., 2009), samt i olika studier (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Löwing, 2016).

5.2.3 Vilka kunskaper har elever om division?

Eleverna visade tillräckliga kunskaper om delningsdivision eftersom deras strategier ledde till korrekta svar för 4 eller fler elever, men den bristande förståelsen att en kvot kan uttryckas exakt med ett bråk ledde till att deras strategier vid lösning av ”pizzaproblemen” (se uppgift 8 och 9), om delningsdivision blev komplicerade när de egentligen kunde lösas automatiskt utan beräkningar. Resultatet visade också att lösningsfrekvensen minskade vid delningsdivision med ett udda heltal jämfört med ett jämnt heltal. Resultaten visar också bristande kunskaper om innehållsdivision, där lösningsfrekvenser varierade mellan 2 och 3 korrekta lösningar av 7 möjliga, Mårtensson (2015) visar i sin studie, hur hon med hjälp av variationsteori ger elever och lärare möjligheter att förstå varför division med ett tal mellan 0 och 1 ger en kvot som är större än täljaren. Sådana divisioner bör lösas med innehållsdivision (Löwing & Kilborn, 2002; Skolverket, 2013; Löwing, 2016). Bulgar (2003) visade att elever i årskurs 4 kan lösa sådana problem med hjälp av laborativa aktiviteter i en tillåtande klassrumsmiljö där vägen till svaret är viktigare än den korrekta lösningen. Löwing och

Kilborn (2002) visade att förståelse om bråk underlättas genom att anknyta till elevernas verklighet och på så sätt klargöra tolkningen av division med bråk uttryckt i ett formellt matematiskt språk.

5.2.4 Vad är det då som eleverna ska få möjlighet att utveckla enligt forskning?

Kilpatrick et al. (2001) sammanfattar forskares resultat om vad som kännetecknar matematiska kunskaper. Dessa resultat har eller kommer att ge intryck i läroplaner även internationellt. I forskningsöversikten identifieras de fem kompetenser som forskare är överens om är nödvändiga att elever ges möjlighet att utveckla. Kilpatrick et al. beskriver matematisk kompetens som en fläta av sammanvävda delkompetenser som inte kan separeras utan måste förstås utifrån ett holistiskt perspektiv. Delkompetenserna beskrivs på ett liknande sätt som det uttrycks i kursplanens syfte (Skolverket, 2016). Det är intressant att Kilpatrick även beskriver förmågan att reflektera över matematikens roll i samhället och att ta ansvar för sitt eget lärande genom att utveckla intresse och en positiv attityd till matematiken som ämne, som en matematisk kompetens.

Denna fläta av delkompetenser är det som eleverna ska ges möjligheter att utveckla förståelse om. För att föreliggande studie ska vara relevant, måste frågeställningarna ha stöd i och knyta an till läroplanen. Eftersom vi undersöker kunskaper om bråk i årskurs 6, och bråk inte finns med i kunskapskraven för årskurs 6, krävs argument för att bråk ska få ta plats i undervisningen för årskurserna 4 – 6. I kursplanen för matematik skrivs ”Genom undervisningen ska eleverna ges förutsättningar att utveckla förtrogenhet med grundläggande matematiska begrepp och metoder och deras användbarhet” (Skolverket, 2016a, s.55). Denna skrivning har diskuterats och utvecklats i olika studier och utformningar av diagnoser där slutsatsen är att bråk är ett sådant begrepp (Kilborn, 2014; Löwing & Kilborn, 2002; Löwing, 2016; Skolverket, 2013). I kursplanen anges också att syftet med ämnet matematik är att eleverna utvecklar kunskaper om matematik och dess användningsområden genom att formulera och lösa problem samt att ”reflektera över och värdera valda strategier, metoder, modeller och resultat”. (Skolverket, 2016a, s. 55). Eleverna ska också ges möjligheter att arbeta med verklighetsanpassade problem som kan medföra att de blir intresserad av ämnet och får en tilltro till sin egen förmåga. De ska också enligt kursplanen ges möjligheter att använda digitala verktyg för att kunna arbeta mer effektivt med exempelvis problemlösning. Vi menar att den svenska kursplanens syfte påminner mycket om de kompetenser som diskuteras av Kilpatrick et al. samt Karlsson och Kilborn (2015).

Conceptual understanding — Begreppsförmåga och metodförmåga och samband mellan dem.
Procedural fluency — Att utföra aritmetiska operationer med flyt och ha en god taluppfattning.
Strategic competence — Förmågan att formulera , beskriva och lösa problem.
Adaptive reasoning — Förmåga att tänka logiskt, reflektera, förklara och motivera.
Productive disposition — Förmågan att se matematikens skönhet och dess användbarhet i olika situationer, att tycka matematik är roligt värt ansträngningen att lära sig det, och att ta ansvar för sitt eget lärande.
Vi menar det finns många likheter med den svenska kursplanens fem förmågor men att ovanstående kompetenser tydligare visar att begrepp och metod är två sidor av samma mynt där den ena sidan kräver den andra och tvärtom. Det är svårt att resonera om metoder som handlar om begrepp man inte förstår menar (Löwing, 2016). Det är också intressant att reflektera om orsaker till att den kompetens som handlar om attityder är uttryckt på ett mindre framträdande sätt i den svenska kursplanen jämfört med i de kompetenser som Kilpatrick et al. diskuterar.

Jakobsen et al. (2014) visar i deras forskningsöversikt att bristande kunskaper hos blivande lärare om matematikdidaktik och skolmatematik inte enbart medför att eleverna får svårt att förstå lärarens förklaringar av olika begrepp. Även här finns det ett mynt som har två sidor, nämligen att när en elev ber läraren att förklara sin lösning, finns det risk att läraren inte har tillräckliga kunskaper och i stället börjar prata om något annat som då också blir obegripligt för eleven. I Danmark har Niss och Højgaard (2011) också sammanställt forskning om de kompetenser som både elever och lärare bör ges möjligheter att utveckla. En intressant skillnad är att denna forskning beskriver 8 kompetenser som är uppdelade i 2 delar där hälften av dem handlar om att fråga och svara och den andra hälften om att använda *språk* och *redskap* i matematik. De kompetenser som handlar om att fråga och svara benämns som tankegångskompetens, problemlösningskompetens, modelleringskompetens, och resonemangskompetens. De kompetenser som handlar om att använda språk och redskap benämns som representationskompetens, symbol och formalismkompetens, kommunikationskompetens samt hjälpmedelskompetens.

Även här ser vi många likheter med de förmågor som anges i den svenska kursplanens syfte men framför allt observerar vi att uppdelningen i den del som handlar om att fråga och svara indikerar att de lägger stor vikt på interaktionen mellan lärare och elev och resonemangskompetens. Detta uttrycks också i den femte kompetensen i den kunskapsöversikt som Kilpatrick et al. (2001) sammanställt. Jakobsen et al. (2014) betonar den sidan av myntet där eleven frågar läraren men också andra sidan där läraren frågar eleven. Denna interaktion är en bärande ide i Vygotskijs sociokulturella perspektiv men också i de kompetenser som beskrivits ovan och har inspirerat den svenska läroplanen menar vi.

5.2.5 Vilka synpunkter har elever och lärare om attityder och undervisningsformer?

Resultaten i föreliggande studie visar att å ena sidan fanns det skillnader i vad elever och lärare upplevde angående hur eleverna hade getts möjligheter att utveckla de kompetenser om bråk som testades i diagnosen. Andra likheter eller skillnader hade kunnat komma fram om vi hade genomfört den planerade lärarintervju istället för skriftliga frågor. Resultatet hade kanske också ändrats om vi intervjuat fler elever i klassen.

Likheter i elevernas upplevelser och lärarnas skriftliga svar av sina upplevelser:

- Eleverna har fått möjligheter att utveckla kunskaper om bråk genom att för det mesta arbeta individuellt med läroboken.
- Eleverna upplever att genomgångar i helklass är en arbetsform som används för att introducera nya kapitel i lärobok och resonera om olika lösningsstrategier.
- Elevernas kunskaper bedöms med en diagnos efter varje kapitel i läroboken.
- Eleverna upplever att det finns tillgång till laborativt material.
- Eleverna upplever att matematik är roligt men att bråk är svårt.

Skillnader i elevernas upplevelser och lärarnas skriftliga svar av sina upplevelser är:

- Vissa elever upplever att de inte ska använda digitala verktyg i sitt arbete eftersom de ska använda huvudräkning och motivera sina lösningar, medan lärarna önskar att det fanns tillgång till digitala verktyg.
- Vissa elever upplever att de saknar att arbeta i grupp med problemlösning och att ställa frågor till varandra i par, medan andra upplever att de helst arbetar enskilt.

5.2.6 Reflektioner och förslag till framtida studier

Det som förvånade oss i studien, var att elevernas lösningar gav så mycket kvalitativ information om de strategier och resonemang eleverna använde och information om varför vissa av dessa strategier ledde till korrekta svar och andra inte. Detta visar enligt vår mening värdet av att lägga till uppmaningen ”Förklara hur du tänkte” i samtliga diagnosuppgifter. Genom enskilda intervjuer med eleverna växte det fram en god bild av den enskilde elevens styrkor och svagheter men också av styrkor och svagheter hos lärarna angående vilka möjligheter eleverna hade getts att utveckla förståelse av bråks aspekter samt jämförelser och divisioner med bråk. Clarke et al. (2007) rekommenderar andra att använda metoden med enskilda intervjuer eftersom detta ger den information som krävs för att eleven ska få möjligheter att utveckla förståelse av bråk.

Vi blev inte förvånade över resultaten i studien. Internationella och svenska studier (Skolverket, 2016b; Löwing, 2016) bekräftar att asiatiska elever visar bättre resultat jämfört med övriga länder inklusive Sverige. Vi blev dock förvånade över att det är så eftersom forskning övertygande visar hur undervisningen kan förändras så att missuppfattningar förebyggs och att eleverna ges möjligheter att utveckla förståelse för de strategier som forskning visar är framgångsrika. Undervisningsformer är enligt forskning viktiga att variera och eleverna måste ges möjligheter att utveckla förståelse genom att visa hur bråk kan uttryckas på olika sätt men också att utveckla förmågor enligt kursplanens kunskapskrav. Detta kan ske genom att resonera om begrepp och metoder för jämförelser och division med bråk och då förklara och motivera sina lösningar av problem och använda strategier tillsammans med kunniga lärare och kamrater.

Resultaten visar att eleverna sammantaget har tillräckliga kunskaper om bråks aspekter samt jämförelser och division med bråk. De visar dock bristande kunskaper om att ett bråk är ett tal som har en viss storlek och även kan uppfattas som en kvot, att uppskatta storleken av ett bråk eller en kvot genom att göra relativa jämförelser av täljare och nämnare samt att förstå metoden innehållsdivision och när den är lämplig att använda. Resultaten visade även samband mellan bråks aspekter och kunskap om jämförelser och division. För att förstå begreppet ekvivalenta bråk och därmed kunna förkorta och förlänga bråk krävs förståelse av aspekten bråk som förhållande. För att förstå division med bråk är det nödvändigt att förstå aspekten bråk som en kvot som innebär att ett bråk kan tolkas som ett tal som har en exakt storlek men också som en kvot. Vi menar också att en anledning till att elever inte ges alla de möjligheter som forskning menar är viktiga att ge, kan bero på att enligt Lundgren (2014) är lärare styrda av ramfaktorer såsom brist på tid och andra yttre faktorer. Arbetsformer är enligt våra erfarenheter av VFU styrda av schema och ekonomi och av att skolan kanske har bestämt att prioritera andra mål såsom att utveckla förståelse genom tematiskt arbete. Eftersom vi har genomfört en kvalitativ studie som inte kan översättas till mer generella kontexter, kan vi inte påstå något mer än att studiens resultat tycks bekräfta andra studiers resultat (Clarke et al., 2007), och att resultaten är för osäkra för att dra några slutsatser huruvida elevernas har utvecklat förståelse av andra aspekter av bråk förutom bråk som del av en helhet. Vi menar dock att resultatet visar att det finns ett samband mellan förståelse av aspekten bråk som kvot och bristande kunskaper om innehållsdivision. Vi menar också att det är är viktigt att lärare har de kompetenser som krävs för att både kunna förklara ett matematiskt område under gemensamma genomgångar och att kunna tolka och förklara elevers lösningar samt motivera varför vissa strategier leder till korrekta lösningar och andra inte.

Asiatiska elever visar i olika studier såsom TIMSS (Skolverket, 2016b), att deras begreppsförståelse och problemlösningsförmåga är överlägsen övriga länders elever och att de förstår att tolka bråk och tillhörande räkneoperationer i text, bild och laborativa hjälpmedel och utföra operationer med bråk utan att använda algoritmer. Kan kompetensutveckling för lärare möjligen vara en metod för att höja kvaliteten i undervisningen om bråk och därmed utan att tillföra resurser i form av tid ge eleverna fler möjligheter att utveckla förståelse av bråks aspekter samt de metoder som är förknippade med dem?

Av ovanstående skäl föreslår vi en framtida studie med syfte att kunna användas som underlag för att utveckla ett kompetensutvecklingsmaterial för lärare i årskurs 4 – 6. Vi menar att studien ska genomföras som en väl avgränsad variant av en Learning study enligt den metod som Mårtensson (2015) diskuterar och där hon menar att en sådan studie skulle vara praktiskt genomförbar med tanke på skolors begränsade resurser och tidsramar.

Referenser

Behr, M., & Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. I T. Post (Red.), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods.* (*2.* uppl., s. 201-248). Boston: Allyn and Bacon.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. (2., [rev.] uppl.). Malmö: Liber.

Bulgar, S. (2003). Using Research to Inform Practice: Children Make Sense of Division of Fractions. *International Group for the Psychology of Mathematics Education, (2)*, 157 - 164. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED500921.pdf

Carpenter, T. P., Fennema, E., & Romberg, T. A. (Red.). (2012). *Rational numbers: An integration of research*. Mahwah: Routledge.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on theoretical to study students' understandings of fractions. I *Educational Studies in Mathematics 64(3),* s. 293-316.

Clarke, D. M., Roche, A., & Mitchell, A. (2007). Year six fraction understanding: A part of the whole story. I J. Watson & K. Beswick (Red.) (2007). I *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, s. 207 - 216. Wahroonga: MERGA Inc.

Cramer, K., Behr, M., Post T., & Lesh, R. (2009). *Rational number project: Initial fraction ideas.* http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/rnp1-09.html.

Elmeroth, E. (2008). *Etnisk maktordning i skola och samhälle*. (1. uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Engström, A. (Red.) (1998). Matematik och reflektion: en introduktion till konstruktivismen inom matematikdidaktiken. Lund: Studentlitteratur.

Jakobsen, A., Ribeiro, C.M. & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 19 (3–4), 135–150.

Karlsson, N. (2015). Matematik i lärarutbildningen: Studenters kunskaper i och uppfattningar om matematik: En forskningsrapport från MIL- och SKUM-projekten (Working Paper). Huddinge: Södertörns Högskola.

Karlsson, N. & Kilborn, W. (2015). *Matematikdidaktik i praktiken: att undervisa i årskurserna 1-6.* (1. uppl.) Malmö: Gleerups Utbildning.

Kieren, T. E. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. I Lesh, R. A., & Bradbard, D. A. (Red.), (1976). *Number and Measurement. Paper from a Research Workshop.* Ohio: ERIC/IRC, s. 108 -151.

Kilborn, W. (2014). *Tal i bråk och decimalform - en röd tråd.* Göteborg: Nationellt Centrum för Matematik.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Red.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2014). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. (3. [rev.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Lundahl, C. (2011). *Bedömning för lärande*. Stockholm: Norstedts.

Lundgren, P. (2014). Läroplansteori och didaktik – framväxten av två centrala områden. I U.P. Lundgren, R. Säljö, & C. Liberg (Red.) *Lärande, skola, bildning – grundbok för lärare*.(3., [rev. och uppdaterad] uppl.). Stockholm: Natur & kultur.

Löwing, M. (2016). *Diamant - diagnoser i matematik: Ett kartläggningsmaterial baserat på didaktisk ämnesanalys* (Göteborg studies in educational sciences, nr 392). Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2002). *Baskunskaper i matematik: för skola, hem och samhälle*. Lund: Studentlitteratur.

McIntosh, A. (2008). *Förstå och använda tal*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikundervisning, Göteborgs universitet.

Mårtensson, P. (2015). *Att få syn på avgörande skillnader: Lärares kunskap om lärandeobjektet* (Doctoral dissertation, Jönköping University, School of Education and Communication).

Niss, M., & Højgaard, T. (Red) (2011). *Competencies and Mathematical Learning Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde: IMFUFA.

Reys, R. E., Lindquist, M. M., Lambdin, D. V & Smith, L (2012). *Helping children learn mathematics. (10. ed.)* (red.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Roche, A., & Clarke, D. M. (2013). Primary teachers' representations of division: assessing mathematical knowledge that has pedagogical potential. *Mathematics Education Research Journal, 25*(2), 257–278.

SFS 2010:800. *Skollag*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Skolverket. (2013). *Diamant- nationella diagnoser i matematik-rationella tal.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2016a). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. (3., [rev] uppl.). Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2016b). *TIMSS 2015 Svenska grundskoleelevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i ett internationellt perspektiv.* (Rapport 448). Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2017). *Kommentarmaterial till kursplanen i matematik*. (Reviderad 2017). Stockholm: Skolverket

Säljö, R. (2014). Den lärande människan – teoretiska traditioner. I U.P. Lundgren, R. Säljö, & C. Liberg (Red.) *Lärande, skola, bildning – grundbok för lärare*.(3., [rev. och uppdaterad] uppl.). Stockholm: Natur & kultur.

Vetenskapsrådet (2017). *God forskningssed.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Bilaga 1

Begäran till samtycke om deltagande i undersökning November 2017

Hej

Vi är två studenter, Jenny Wiklund och Rebecka Bruér, som läser sjunde terminen på grundlärarprogrammet med inriktning mot årskurserna 4-6 vid Högskolan i Kristianstad. Under hösten kommer vi att göra en studie som kommer att utgöra vårt examensarbete. Vårt syfte med studien är att undersöka hur elever uppfattar beräkningar med tal i bråkform samt vilka strategier och resonemang de använder. Bråk är viktigt att förstå inför framtida undervisning i matematik.

X-skolan är intressant för oss eftersom vi ska bli mellanstadielärare. Vi planerar att besöka skolan vid 2-3 tillfällen i november eller december. Vid första tillfället kommer klassen under en lektion att svara skriftligt på uppgifter som omfattar räkning med bråk. Vid senare tillfällen kommer ett fåtal elever att intervjuas. Matematiklärare kommer sedan att intervjuas utifrån sitt perspektiv.

Namnen på deltagare och skola kommer att avidentifieras i studien. Deltagandet i intervjuerna är helt frivilligt och intervjupersonen kan när som helst avbryta sin medverkan i undersökningen. Vidare kan intervjupersonen avstå från att besvara enskilda frågor under intervjuns gång. Vi kommer att spela in intervjuerna och transkribera dem för vår analys. Insamlat material kommer inte att delges någon obehörig. Allt material kommer att förstöras efter det att uppsatsen har godkänts av examinator vid högskolan.

Vi tackar för er medverkan. Vid frågor kontakta:

Jenny Wiklund, 070-9999999, jenny.wiklund@xxxxx.se

Rebecka Bruér, 070-9999999, rebecka.bruer@xxxxx.se

✂…………………………………………………………………………………………..

Jag/vi ger samtyckte till att vårt barn: ________________________________

- ☐ Skriftliga svar på uppgifter får användas i studien
- ☐ Deltar i intervju med röstinspelning

Vårdnadshavares underskrift:

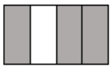
____

Bilaga 2

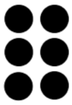
Namn: ____

Uppgifter till studien

1) Vilket bråk föreställer det skuggade området?



2) Bilden föreställer $\frac{3}{5}$ av ett antal bollar. Rita en bild som föreställer alla bollarna. **Förklara** hur du tänkte.



3) Vilket är störst av bråken $\frac{1}{8}$ och $\frac{1}{5}$? **Förklara** hur du tänkte.

4) Ringa in det tal som är ungefär lika stort som $\frac{7}{8}$. **Förklara** hur du tänkte.

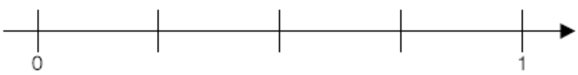
7 8 0 $\frac{1}{2}$ 1 15 -1

5) Ringa in det/de uttryck som är större än 4. **Förklara** hur du tänkte.

$4 \cdot \frac{1}{2}$ $4/\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \cdot 4$ $\frac{1}{2}/4$

6) Skriv på tallinjen ett *a* vid talet $\frac{1}{2}$, ett *b* vid talet $\frac{1}{4}$ och ett *c* vid talet $\frac{2}{4}$

Förklara hur du tänkte.



7) Rita en tallinje som börjar med talet 0 och slutar med talet 10. Markera sedan ungefär var du tror följande tal ligger på din tallinje. **Förklara** hur du tänkte.

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{10}$ c) $\frac{25}{100}$

8) Hur mycket pizza får varje person om 3 pizzor delas lika med 5 personer? **Förklara** hur du tänkte.

9) Hur mycket pizza får varje person om 5 pizzor delas lika med 4 personer? **Förklara** hur du tänkte.

10) Grädde säljs i förpackningar som rymmer en femtedels liter. Nellys mamma behöver 2 liter grädde till Nellys födelsedagskalas. Hur många förpackningar grädde ska hon köpa? **Förklara** hur du tänkte.

11) Nellys pappa ska baka bröd och behöver då 2 liter mjöl. Han har en skopa (bägare) som rymmer två tredjedels liter mjöl. Hur många skopor mjöl behöver han?
Förklara hur du tänkte.

Tack!