Självständigt arbete (examensarbete),15 hp, för

Speciallärarexamen, specialisering matematikutveckling

VT 2017

# Vad algebra är bra till?

Några gymnasieelevers förståelse av algebra.

# What is algebra good for?

A few High School Students´ understanding of algebra.

Svetlana Bengtsson

Sektionen för lärande och miljö

**Författare**
Svetlana Bengtsson

**Titel**
Vad algebra är bra till?
Några gymnasieelevers förståelse av algebra.

What is algebra good for?
A few High School Students´ understanding of algebra.

**Handledare**
Ingemar Holgersson

**Examinator**
Daniel Östlund

**Sammanfattning**
Enligt mina erfarenheter upplever många elever i skolan algebra som svårt. De uppfattar ofta algebraisk räkning som abstrakt och obegriplig och ser ingen mening med att lära sig det. Det är vanligt att eleverna så sent som på gymnasiet uppvisar svårigheter med variabelbegreppet och hur det används. Detta har gjort mig nyfiken. Vad är det som eleverna inte förstår och varför? Med min undersökning ville jag få en uppfattning om varför algebra är så svårt för många elever och vad man kan göra för att underlätta algebrainlärningen för dem. Under min tid som gymnasielärare har jag mött flest elever i matematiksvårigheter på de olika yrkesförberedande programmen. Jag antog att de eleverna har sämre algebrakunskaper än de övriga eleverna på gymnasiet. Därför fokuserade jag mig i min studie på en grupp elever som går på ett av gymnasieskolans yrkesförberedande program.

Syftet med mitt examensarbete var att undersöka vilka svårigheter elever som går första året på gymnasieskolans yrkesprogram har när de arbetar med att formulera algebraiska uttryck och formler samt vad svårigheterna beror på. För att kunna besvara mina frågeställningar har jag intervjuat sex elever i grupp om två och två medan de löste några utvalda uppgifter.

Resultatet visade att elever som ingick i studien hade svårt med att uppfatta generella uttryck vilket kan bero på bl.a. att eleverna inte har utvecklat tillräckligt hög abstraktionsnivån för att kunna hantera den symboliska algebran. För att hjälpa eleverna till att bättre förstå meningen med detta ställde jag mig en fråga om man genom att betona uppgifternas underliggande aritmetiska strukturer kan få en bättre ingång till algebran. Undersökningen som jag gjorde tydde på att denna åtgärd hjälpte eleverna att få en naturlig övergång till att använda bokstäver i generella uttryck samt till en bättre förståelse för vad algebra är bra för.

**Ämnesord**
Algebraundervisning, förståelse av algebra, gymnasiematematik, specialpedagogik, svårigheter med algebra

Education is not the learning of facts,
but the training of the mind to think.

Albert Einstein

# Innehåll

# 1. Inledning

## 1.1. Bakgrund

När jag började fundera på vad mitt examensarbete skulle handla om föll det sig naturligt att fokusera på något inom algebraundervisning. Detta beror på att enligt mina erfarenheter upplever många elever algebra i skolan som svårt. Svårigheterna uppstår när elever börjar räkna med bokstäver istället för siffror. Detta gör att eleverna blir förvirrade och lätt tappar motivationen. Algebra är för matematik vad grammatik är för språk hävdar Palm (2008). Utan en god kunskap i grammatik kan man aldrig bli riktigt duktig på ett främmande språk. I matematiken är det samma sak – utan bra kunskaper i algebra kommer man aldrig att få tillgång till de verktyg den kan erbjuda menar författaren.

Engström (2015) diskuterar i sin forskningsrapport yrkesutbildningens problematik och att elever i matematiksvårigheter finns i större utsträckning just på gymnasieskolans yrkesprogram. På flera av programmen är det ungefär var tredje elev som får underkänt i kursen Matematik 1a, något som är oväntat med tanke på att dessa elever är godkända från årskurs 9, påstår Engström (2015). Kursen Matematik 1a är en gymnasiegemensam kurs på alla yrkesprogram som i stort sett är en repetition från grundskolan. Enligt ämnesplanen ska eleven efter avslutad kurs Matematik 1a kunna hantera algebraiska uttryck och för karaktärsämnena relevanta formler samt metoder för att lösa linjära ekvationer (SKOLFS 2011:261).

Av skollagen (SFS 2010:800) framgår att ”alla barn och elever ska ges den ledning och stimulans som de behöver i sitt lärande och sin personliga utveckling för att de utifrån sina egna förutsättningar ska kunna utvecklas så långt som möjligt”. Vidare påpekas även att om en elev riskerar att inte nå de kunskapskrav som minst ska uppnås ”ska eleven skyndsamt ges stöd i form av extra anpassningar inom ramen för den ordinarie undervisningen”. För att den pedagogiska insatsen ska ge resultat krävs det att elevens svårigheter är kartlagda så att hjälpen anpassas efter elevens behov (Sterner & Lundberg, 2009). Det är viktigt att se vad eleverna kan och därifrån utveckla deras kunskaper menar författarna. Speciallärare har då en viktig roll i utredningsarbetet eftersom de har särskild kompetens kring detta. Enligt högskoleförordningen ska den blivande speciallärare kunna ”analysera och medverka i förebyggande arbete och bidra till att undanröja hinder och svårigheter i olika lärmiljöer” (SFS 1993:100).

Med min undersökning hoppas jag kunna få en uppfattning om varför algebra är så svårt för en del elever, samt bidra med en ny kunskap om hur kan man förbättra elevernas lärmiljö för att underlätta deras algebrainlärning.

## 1.2. Syfte och problemformulering

Syftet med min studie är att undersöka vilka svårigheter elever som går första året på gymnasieskolans yrkesprogram har när de arbetar med att formulera algebraiska uttryck och formler samt vad svårigheterna beror på. Min förhoppning är att resultatet av mitt arbete kommer att ge ett bidrag till det som tidigare forskning kommit fram till, och dessutom kan leda till en förbättrad undervisning som är anpassad för de elever som har störst problem med algebra.

Studiens problemformuleringar:

1. Vilka svårigheter har gymnasieelever på yrkesförberedande program när de arbetar med att formulera generella algebraiska uttryck och vad beror eventuella svårigheter på?
2. Kan man genom att betona uppgifternas underliggande aritmetiska strukturer få en bättre ingång till algebran?

## 1.3. Studiens avgränsning

För att få svar på mina problemformuleringar valde jag att intervjua några elever som går på en gymnasieskola i södra Sverige. Eftersom jag inte hade så mycket tid till mitt förfogande skulle jag avgränsa mitt arbete så att det blev möjligt att genomföra. Undersökningen omfattar därför bara sex elever som går på ett yrkesförberedande program och läser kursen Matematik 1a. Trots det hoppas jag att studien har givit ett användbart resultat för utveckling av algebraundervisningen.

## 1.4. Studiens upplägg

Mitt examensarbete är uppdelat i fem delar. Den första delen innehåller bakgrund, studiens syfte med problemformulering och avgränsning. Andra delen handlar om tidigare forskning inom området, vilket belyser svårigheter med algebra som en del elever har, samt vad forskare anser är möjliga vägar till att bättre förstå algebra. Vidare redovisar jag den teoretiska utgångspunkt som förklarar hur människor lär sig matematiken. Till sist nämner jag de specialpedagogiska perspektiven på lärande och utveckling. I del tre redovisar jag metoden som jag använt för att samla in data, val av uppgifter till undersökningen, urval samt genomförande och etiska överväganden. Resultat och analys av de genomförda intervjuerna presenterar jag i del fyra. Den avslutande femte delen innehåller en diskussion som har koppling till rön från tidigare forskning. I slutet av femte delen ger jag förslag till fortsatt forskning. Slutligen redovisas referenser. Diskussionsuppgifter samt information till målsman och brev till elever finns med som bilagor.

# 2. Tidigare forskning inom området

I detta avsnitt ger jag en redogörelse för tidigare forskning som är av betydelse för min undersökning.

## 2.1. Varför behövs algebra?

Vårt moderna samhälle ställer större krav på våra matematiska färdigheter (Persson, 2002). Algebra som är en del av matematiken används i större utsträckning i både arbets- och vardagslivet. Med hjälp av algebra kan komplicerade situationer representeras på ett överskådligt sätt. För att kunna förstå innehållet i t.ex. diagram i tidningar eller i TV måste man behärska olika representations former som beskriver samband. Eftersom det algebraiska språket är ett standardverktyg för att hantera tal och funktioner, poängterar Persson (2002) att alla måste ges möjlighet att hantera detta språk.

## 2.2. Vägar till algebra

Många elever i skolan har svårt med att uppfatta generella uttryck för olika matematiska samband och upplever algebra som abstrakt och meningslöst enligt Persson (2002). Algebra, i jämförelse med aritmetik och geometri som är knutna till erfarenheter i verkligheten, är inte på ett lika naturligt sätt kopplat till det vardagliga livet enligt Bergsten m.fl. (1997). Därför är det viktigt att hitta ingångar till algebran med avstamp i det kända menar författarna. Eftersom vi hela tiden omges av former och mönster i vardagslivet och elever har en naturlig förmåga att uttrycka generaliseringar, anser Bergsten m.fl. (1997) att detta kan vara en lämplig utgångspunkt för att utveckla ett algebraiskt resonemang. När eleverna uppmanas att verbalt beskriva sina iakttagelser för någon annan uppstår ett behov av att använda förkortningar och en naturlig övergång till ett användande av bokstavsymboler. På det sättet upptäcker elever en mening med att använda bokstavssymboler enligt författarna.

Med utgångspunkt i synen på vad algebra egentligen handlar om och vad man kan använda den till definierar Bednarz m.fl. (1996) fyra olika perspektiv på algebra:

- Generaliseringsperspektivet: Algebra används för att kunna generalisera, uttrycka mönster och regelbundenheter.

- Problemlösningsperspektivet: Algebra används för att lösa problem där aritmetiken inte räcker till.
- Modelleringsperspektivet: Algebra används för att skapa modeller av verkliga eller tänkta situationer.
- Funktionsperspektivet: Algebra uttrycker samband mellan variabler.

Enligt Bednarz m.fl. (1996) är arbete med generaliseringar ett extremt effektivt sätt att initiera algebra. Utifrån syftet kommer fokus i min studie ligga på algebra ur generaliseringsperspektivet.

## 2.3. Speciella svårigheter med algebra

I sin longitudinella undersökning om vilka algebrakunskaper eleverna har med sig från grundskolan och hur de kan utveckla dessa under gymnasietiden har Persson och Wennström (1999, 2000) kommit fram till att vissa elever som kommer från grundskolan har kvar en del missuppfattningar vad gäller algebra. Författarna har klassificerat orsaker till elevers algebrasvårigheter i följande grupper:

- Eleven har brister i sina aritmetiska färdigheter
- Den matematiska abstraktionsnivån är inte tillräckligt hög
- Det logiska tänkandet har inte utvecklats och tränats

För att kunna hantera den symboliska algebran är det nödvändigt att eleverna bl.a. har en god förståelse för variabelbegreppet och att de lär sig se poängen med att använda bokstäver i olika sammanhang (Persson & Wennström, 1999, 2000). Studien också ger stöd för uppfattningen att det inte är minst viktigt med motivation och självförtroende om man ska lyckas med algebra.

Persson (2010) har utvecklat dessa tankar vidare i sin avhandling. Det övergripande syftet med detta forskningsarbete var att analysera vad som krävs för att flera elever ska lyckas med algebra och algebraiskt tänkande på gymnasiet. Resultatet av studien har visat vilka faktorer som är viktiga i lärandet av algebra. Enligt Persson (2010) det som spelar roll är de förkunskaperna som har elever, den konceptuella utvecklingen, instruktionerna, tiden för lärandet samt attityder och känslor hos eleverna. En av de viktigaste faktorerna för att utveckla bra kunskaper är att både läraren och eleven tror att det är möjligt att lyckas och att eleven får stöd utifrån sin kunskapsnivå (Persson, 2010).

I sin forskning om elevers algebraiska förmåga och förståelse finner Olteanu (2000, 2001), precis som i ovanstående studier, brister i aritmetiska färdigheter som ett av hindren vid inlärning av algebra. Syftet med studien var att se hur elevernas algebraiska förmåga och förståelse utvecklas genom att olika arbetsformer och innehåll i algebraundersvisningen används. Författaren framhåller i sin forskning att för att kunna utforma undervisningen på ett bra sätt behöver man ta reda på varje enskild elevs förkunskaper och var svårigheterna ligger. Därför är det viktigt att tolka resultat från en diagnos ur en kvalitativ synvinkel och inte baseras på hur många rätt eller fel en elev har menar Olteanu (2000, 2001).

I sin avhandling *Why is algebra so difficult?* beskriver Naalsund (2012) att många elever har inställningen att algebra är ett meningslöst manipulerande av symboler och har svårt att förklara varför de gör som de gör. Eleverna använder ofta informella metoder såsom att pröva sig fram eller gissa. Många elever saknar den formella kunskapen att kunna räkna med symboler enligt Naalsund (2012). Författaren menar att matematikundervisningen måste utvecklas och förändras. För att elever ska ha bättre kunskaper och färdigheter i algebra bör de i undervisningssituationen få möjlighet att utveckla sin förmåga att förklara och motivera sina resonemang hävdar Naalsund (2012).

Egodawatte (2009) har visat i sin studie att elever möter svårigheter i övergången från aritmetik till algebra. Många har svårt att översätta uppgifter till algebraiskt språk och visar bristande kunskaper i en variabels betydelse. Andra faktorer som påverkar elevers resultat är slarvfel, ångest och brist på motivation enligt författaren. Frågan som författaren ställer är huruvida kognitiva faktorer, tidigare undervisning eller andra faktorer har inverkan på elevernas val av metoder (Egodawatte, 2009). En del elever i studien använde algebraiska metoder i uppgifterna på ett effektivt sätt medan andra kämpade för att klara av dem. Algebra är svår att lära ut och lära sig. Det som kan underlätta inlärningen av algebra är kamratstödet hävdar författaren. Kreativa metoder som används av en del elever kan hjälpa andra att förbättra sin förståelse och förstärka algebrainlärningen menar Egodawatte (2009).

Makonye och Khanyile (2015) undersökte i sin studie i vilken utsträckning analys av elevers missuppfattningar i algebra kan hjälpa elever att reducera dessa svårigheter. Författarna fann elevernas bristande förmåga att kunna se samband mellan matematiska begrepp som ett hinder i förståelse av algebra. I studien har eleverna först fått möjlighet att förklara hur de tänkt när de löste uppgifterna under diagnostestet samt analysera felaktiga strategier. Under nästa liknande test reducerade eleverna 98,6 procent av missuppfattningar de hade uppvisat i diagnostestet. Författarna menar att uppföljningsintervjuer efter testet fick eleverna att tänka rationellt kring felaktiga svar i olika uppgifter och hjälpte de i stor utsträckning att minska missuppfattningarna de hade (Makonye & Khanyile, 2015).

## 2.4. Teoretisk utgångspunkt

Lärare och speciallärare behöver veta var varje elev befinner sig i sin kognitiva utveckling för att kunna anpassa undervisningen. Under mitt arbete med uppsatsen fångades min uppmärksamhet av David Talls teori som beskriver hur människor lär sig matematik. Grunden till modellen är två egenskaper hos människan som Tall kallar för ”set-befores” och ”met-befores”. De första har vi i generna när vi födds och står för förutsättningar som utvecklas olika beroende på varje individs tolkning av nya situationer. Tre av dem är särskilt viktiga för matematisk tänkande anser Tall (2008):

- Att känna igen mönster samt se likheter och skillnader.
- Att repetera sekvenser tills de blir automatiserade.
- Att använda språket för att kunna presentera de metoder som används när vi tänker och resonerar kring olika problem.

Med ”met-befores” menar Tall (2008) de samlade erfarenheter som individen har från tidigare situationer eller förkunskaper. Hur vi tolkar en situation beror på vilka ”met-befores” vi har. För förståelse av algebra betyder det att elever behöver ha förkunskaper om t.ex. vad en variabel är. Det som kan ställa till problem är enligt Tall (2008) att individen kan bli förvirrad när nya situationer dyker upp beroende på hur han/hon tolkar dem. Mötet med bokstäver i algebra kan göra elever förbryllade eftersom bokstäverna ofta associeras med alfabetet.

Talls modell fokuserar kring den kognitiva strukturen i hur begreppsbildningen sker och grundar sig på antagandet att lärande av matematiska begrepp kan ske på olika sätt och olika nivåer. Tall (2008) kallar dem för *matematikens tre världar*:

- Den *konceptuella – förkroppsligade världen*, som bygger på människors uppfattning av objekt i verkligheten. Denna matematiska värld innefattar de begrepp som vi har upptäckt genom våra iakttagelser i den reella världen, dvs. kunskap som vi skaffat oss genom betraktelse med hjälp av våra sinnen.

- Den *proceptuella – symboliska världen,* som växer från den första världen och bygger på hur olika process (handlingar) transformeras till begrepp (concept). Ordet *procept* är blandning av första delen av *pro-cess* och andra delen av *con-cept*. Denna matematiska värld består av symboler och handlingar som vi utför då vi till exempel manipulerar inom algebra.
- Den *axiomatisk – formella världen,* som bygger på den "formella" världen som är mer abstrakt och utgår från formella definitioner och bevis av satser.

Vanligtvis har individen en definition av begrepp som är en del av en mer omfattande begreppsbild enligt Tall (2008). Om individen har skapat en begreppsbild innan han/hon stöter på något begrepp då är det inte alls säkert att den formella begreppsdefinitionen kommer att accepteras lätt. Detta kan försvåra förståelse av mer abstrakta matematiska begrepp längre fram menar Tall (2008). Elever har i regel med sig inte matematisk förståelse av de begrepp som de möter i matematiken. Denna förförståelse kan vara väldigt varierande och beror på individens erfarenheter hävdar författare.

Talls modell förutsätter inte att individen går igenom de tre matematikens världar i någon speciell ordning för att nå en högre nivå av begreppsförståelse utan delar matematiska kunskaper i tre grupper som inte har någon hierarkisk relation till varandra. Enligt Tall (2008) uppvisar många elever en skillnad i utvecklingen av sin matematiska förståelse och bl.a. i förståelse av symboler och uttryck. En del elever dröjer sig kvar i ett procedurellt sätt att se på matematiken vilket begränsar deras inlärning av algebra.

## 2.5. Specialpedagogiska perspektiv

De olika perspektiven bottnar i hur forskningen söker förklaringar till skolproblem. Det kategoriska perspektivet enligt Persson (2001) utgår ifrån att det är eleven som har svårigheter. Fokus riktas mot inre, individuella förhållanden. Skolan söker efter och urskiljer problemgrupper och försöker sedan förklara dessa problemgruppers svårigheter med hjälp av psykologiska och neurologiska förklaringar. I det kategoriska perspektivet sätts åtgärder endast in på individnivå menar (Persson, 2001).

Det relationella perspektivet fokuserar på yttre, sociala, organisatoriska och samhälleliga förhållanden. Relationell pedagogik grundas på tanken att människan växer, utvecklas och lär sig saker i relationer (Aspelin & Persson, 2011). I det relationella perspektivet ses olikheter som något positivt och som en resurs. Olikheter är något som berikar gruppen och ställer inte till problem. Fokus läggs på svårigheterna i miljön kring eleven, inte hos eleven själv enligt författarna.

# 3. Metod

I detta avsnitt redovisar jag urvalet av intervjupersoner. Sedan klargör jag valet av undersökningsmetod och datainsamlingsform. Till sist diskuterar jag studiens tillförlitlighet.

## 3.1. Val av metod

Utifrån det jag hade för avsikt att undersöka och eftersom det inte var mitt intresse att söka kvantifierade svar på mina problemformuleringar, fann jag att ett kvalitativt tillvägagångssätt var lämpligast i min studie. Fokus lades på elevers upplevelser och tankar och deras syn på algebra utifrån det genomförda testet. Den kvalitativa forskningen enligt Bryman (2011) går mer på djupet och försöker beskriva hur, vad och varför saker och ting sker och tolka utifrån dess kontext och dess sammanhang.

Eftersom jag försökte få svar på elevers egna förklaringar och tankar var det nödvändigt att metoden genomfördes på ett sådant sätt att det genererade data som innehöll detta. Jag genomförde studien med semistrukturerade intervjuer som enligt Bryman (2011) låter intervjuaren att ställa följdfrågor, be om förklaringar och förtydliganden vilket ger en hög validitet i undersökningen. Kvale och Brinkmann (2010) menar att fördelen med den här typen av intervju är att man, genom direkt ifrågasättande av det som just har sagts, kan ge ett vidare innehåll av intervjupersonens svar.

I studien användes fokusgruppintervjuer som innebär att flera respondenter intervjuas samtidigt. Bryman (2011) menar att ofta går det att få bredare och djupare svar med denna metod än med enskilda intervjuer då deltagarna i fokusgruppen ifrågasätter varandra och stimulerar varandra till diskussioner.

Min metod bestod dels i att eleverna i grupp om två och två fick lösa några utvalda uppgifter och diskutera dessa med varandra, dels av att jag i direkt anslutning till intervjuerna ställde följdfrågor till dem för att ta reda på hur de tänkte när de löste uppgifterna. Efter genomförda intervjuer och klarlagda eventuella orsaker till elevernas svårigheter gjorde jag ytterligare två gruppintervjuer där jag försökte handleda elever i deras tankegångar.

## 3.2. Val av uppgifter

I Lgr11 framstår det att momentet mönster är en viktig del inom matematiken och en förkunskap till algebra (Skolverket, 2011). Eftersom min avsikt med undersökningen var att testa elevers förståelse för algebra bestämde jag att välja uppgifter som handlade om mönster och samband vilket anses vara viktiga ingångar till det aktuella området enligt Bednarz m.fl. (1996). Målet var också att synliggöra elevernas förmåga att uttrycka en generalisering.

Undersökningen utgick från ett test (se bilagan 1) som bestod av två uppgifter och handlade om att upptäcka en underliggande struktur eller mönster. Jag valde att kalla testet ”Diskussionsuppgifter” istället för test eller prov för att eleverna inte skulle känna sig pressade och bedömda.

Första uppgiften har jag formulerat själv. Meningen med denna uppgift var att synliggöra elevernas förståelse om hur algebra kan representera verkliga situationer.

*Uppgift 1:*

På ett företag behöver man hyra ett svetsaggregat. Att hyra en sådan på ett svetscenter kostar i fast avgift 1000 kr och sedan 198 kr /dag.

a) Visa hur beräknar du hyrkostnaden för svetsaggregatet beroende på antal dagar som det ska hyras ut.
b) Skriv ett uttryck som visar hur hyrkostnaden förändras beroende på hur många dagar man behöver hyra ett svetsaggregat på detta företag.

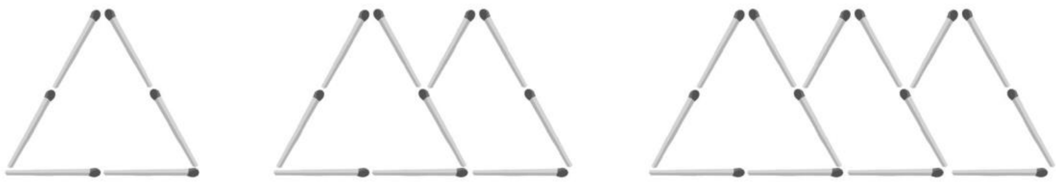
Tanken med denna uppgift var att få syn på ifall eleverna själva kunde upptäcka att den använda beräkningen faktiskt följer samma idé. Därefter skulle eleverna skriva ner ett algebraiskt uttryck som klart uttryckte den tillämpade principen. Resonemanget skulle leda till förståelse av det centrala i de algebraiska formlerna.

Den andra uppgiften hämtade jag från Skolverkets bedömningsstöd i matematik. Även denna uppgift handlade om elevers förmåga att upptäcka mönster. Jag utgick från ett mönster som kan illustreras geometrisk med hjälp av tändstickor. Min avsikt var att eleverna kunde ta hjälp av bilden och konkret material för att se strukturen i mönstret.

Det är viktigt för eleven att se någon nytta med algebra, dvs. att den kan användas för att lösa problem med, hävdar Bergsten m.fl. (1997). Dessa problem behöver absolut inte hämtas ur vardagen bara de handlar om något påtagligt och stimulerar fantasin enligt författarna.

*Uppgift 2:*

**Mönster med stickor**



**Figur 1** **Figur 2** **Figur 3**

1) Hur många stickor behövs till figur 5 enligt mönster?
2) Beskriv med egna ord hur mönstret växer, dvs hur antalet stickor ökar med figurernas nummer.
3) Skriv en regel som kopplar ihop antalet tändstickor med figurens nummer.
4) Vilket nummer har den figur som du kan bygga av 42 stickor?

Fördelen med den här typen av uppgift är att eleverna får möjlighet att visa upp flera uttrycksformer medan de arbetar med den. De får bygga mönster med konkret material, rita av det på paper, diskutera hur mönstret är uppbyggt, hur nästa figur ser ut och vad som händer i mönstret. Man kan också koppla mönstret med en tabell och sedan försöka formulera mönsterutvecklingen som ett algebraiskt uttryck.

I den andra delen av undersökningen där jag handledde elever i deras tänkesätt att formulera generella uttryck använde jag mig av två liknande uppgifter som jag presenterar i bilaga 2.

## 3.3. Pilotstudie

Innan jag genomförde intervjuer med mina informanter gjorde jag en pilotintervju med två elever. Min avsikt var att säkerställa att uppgifterna jag valde till studien kunde ge ett bra underlag för intervjuerna, och samtidigt ge mig möjlighet att öva på min intervjuteknik. Pilotstudien hjälpte mig att upptäcka några förbättringar som jag kunde tillämpa i min framtida studie:

- Tydligare formuleringar av uppgifterna.
- Ge eleverna den tid de behöver för att tänka färdigt innan jag ställer en fråga.
- Poängtera att fokus ligger på förståelse av tillvägagångssättet i uppgifterna och inte det rätta svaret.

## 3.4. Undersökningsgrupp

Undersökningen genomfördes på en gymnasieskola som ligger centralt i en kommun. Jag bestämde mig för att genomföra min studie med yrkeselever som läser Matematik 1a. Syftet med detta var att jag ville vända mig till en grupp som enligt mina erfarenheter har stora bekymmer med att klara kursen. Jag valde att begränsa mig till maximum åtta elever för att studien skulle vara genomförbart på den tid som jag hade till mitt förfogande och bedömde att detta skulle vara tillräckligt för att få den empiri jag behövde. Efter diskussion med undervisande lärare bestämde jag mig för att välja sex elever som går på Industriprogrammet och, enligt läraren, har svårigheter i olika delar av matematiken. Bland annat har dessa elever inte klarat av ett delprov i algebra. Läraren trodde även att de här eleverna hade en viss verbal förmåga för att kunna uttrycka sina tankegångar. För att bevara elevernas anonymitet har jag valt att kalla dem E1, E2, E3, E4, E5, E6.

## 3.5. Genomförande

Innan arbete med studien påbörjades hade jag informerat alla berörda elever skriftligt i ett brev. I brevet hade jag förklarat syftet med min studie samt vikten av deras deltagande. Jag poängterade också att det var helt frivilligt. Eftersom alla elever var under arton år valde jag att skicka ett missivbrev hem till föräldrarna. Informationsbrevet till eleverna och missivbrevet hem finns som bilagorna 3 och 4.

Intervjuerna bestämde jag att genomföra i ett enskilt rum under matematiklektioner. På det sättet var det lättare att motivera eleverna till att delta i studien.

Jag valde att spela in mina intervjuer. Repstad (2007) nämner några fördelar med inspelning av intervjuer:

- Intervjuaren kan koncentrera sig på det som sägs och slipper ägna tid till att anteckna under samtalet.
- Analysfasen underlättas p.g.a. att intervjuaren har tillgång till en ordagrann reproduktion av varje intervju.
- Intervjuaren har möjlighet att förbättra sina färdigheter genom att i efterhand kritiskt granska sin intervjuteknik.

## 3.6. Bearbetning

I syfte att få en bra översikt över materialet transkriberade jag ordagrant de delar i intervjuerna som jag ansåg var relevanta för mina frågeställningar. Enligt Kvale och Brinkmann (2010) genom transkribering struktureras intervjusamtalen i en form som bättre lämpar sig för analys. Jag har läst igenom transkriptionerna flertalet gånger, för att förstå och tolka empirin utifrån studiens problemformuleringar. Sedan gjorde jag en sammanfattning av intervjuer, dels för att mina informanter själva skulle kunna läsa igenom och se om jag hade uppfattat rätt det de sade, dels för mig själv för att få en klarare bild av vad som var viktigt. Kvale och Brinkmann (2010) menar att under analysen utvecklas innebörder i intervjun genom att intervjupersonens egna uppfattningar klarläggs och ger forskaren nya perspektiv på fenomenen. Materialet som jag fått med hjälp av intervjuerna har analyserats löpande med studiens frågeställningar som utgångspunkt.

## 3.7. Tillförlitlighet

Bryman (2011) menar att studiens validitet och reliabilitet handlar om forskarens tolkning av det som studeras och beskrivning av tillvägagångssättet. I min undersökning har jag försökt att beskriva och problematisera de val som har gjorts under studiens genomförande och analysprocess. Jag hoppas att resultatet av undersökningen täcker in så mycket som möjligt av problemformuleringarna. Men det är förstås svårt att med säkerhet påstå att mina svarsresultat har täckt hela det tänkta undersökningsområdet eftersom man inte kan dra generella slutsatser utifrån intervjuer med bara sex elever.

Jag tycker att, även om studien inte har den generella relevansen, kan den ändå ge en bild av vad det är som ligger bakom elevernas svårigheter med generaliseringar och användas med syfte att förbättra algebraundervisning i skolan.

## 3.8. Etiska överväganden

Undersökningen genomfördes i enlighet med de fyra etiska krav som enligt Vetenskapsrådets (2011) riktlinjer inom humanistisk - samhällsvetenskaplig forskning ska beaktas:

- *Informationskravet* som innebär att forskaren skall informera de berörda om den aktuella forskningsuppgiftens syfte.
- *Samtyckeskravet* ger deltagarna i en undersökning rätt att själva bestämma över sin medverkan.
- *Konfidentialitetskravet* betyder att uppgifter om alla i en undersökning ingående personer skall ges största möjliga konfidentialitet och personuppgifterna skall förvaras på ett sådant sätt att obehöriga inte kan ta del av dem.
- *Nyttjandekravet* innebär att uppgifter insamlade om enskilda personer endast får användas för forskningsändamål.

För att få ett samtycke för en intervju har jag informerat eleverna om vad deras deltagande skulle bidra med till mitt examensarbete. Jag poängterade att resultatet av undersökningen skulle hjälpa mig att bättre förstå varför en del elever tycker att algebra är svårt och, förhoppningsvis, hitta möjliga vägar till att förbättra undervisning i det aktuella ämnet. Sedan talade jag om att intervjuerna är frivilliga för de deltagande samt att de kunde avbryta sin medverkan när de ville. Till sist berättade jag för eleverna att allt insamlat material skulle behandlas konfidentiellt och endast kommer att användas inom den här studien.

# 4. Resultat och analys

I detta avsnitt redovisas resultatet av genomförda intervjuerna. Det övergripande syftet med studien var att undersöka vilka svårigheter elever som går första året på gymnasieskolans yrkesprogram har när de arbetar med att formulera algebraiska uttryck samt vad svårigheterna beror på. Det centrala ligger i elevernas uppfattningar och tillvägagångssätt som de använde för att slutligen kunna formulera ett generellt algebraiskt uttryck. Resultatet presenteras utifrån undersökningens forskningsfrågor:

1. Vilka svårigheter har gymnasieelever på yrkesförberedande program när de arbetar med att formulera generella algebraiska uttryck och vad beror eventuella svårigheter på?
2. Kan man genom att betona uppgifternas underliggande aritmetiska strukturer få en bättre ingång till algebra?

## 4.1. Elevernas svårigheter i arbetet med generella algebraiska uttryck

*Uppgift 1:*

> På ett företag behöver man hyra ett svetsaggregat. Att hyra en sådan på ett svetscenter kostar i fast avgift 1000 kr och sedan 198 kr /dag.
>
> a) Visa hur beräknar du hyrkostnaden för svetsaggregatet beroende på antal dagar som det ska hyras ut.
> b) Skriv ett uttryck som visar hur hyrkostnaden förändras beroende på hur många dagar man behöver hyra ett svetsaggregat på detta företag.

Den första uppgiften i studien handlade om elevernas förmåga att kunna se och uttrycka ett tankemönster för att sedan hitta ett generellt uttryck för svetsaggregatets hyrkostnad, dvs. förståelse för hur algebra kan representera verkliga situationer. Alla sex intervjuade elever hade inga svårigheter med att räkna ut kostnaden för ett konkret antal dagar.

E1 tillsammans med E2 bestämde sig att räkna ut hyrkostnaden för 5 dagar. De har presenterat följande uträkning med svar:

198 * 5 = 990

990 + 1000 = 1990

I: Kan ni beskriva med ord hur ni tänkte?

E1: Man tar priset per dag och gångar med 5…Sen plussar jag 1000 bara.

I: Vad står 1000 för?

E1: Det som ska alltid betalas…vad heter det… (tittar på uppgiften) fast avgift.

I: Skulle ni kunna visa hur ni beräknar kostnaden för flera dagar?

E2: Vi kan ta t.ex. 7!

I: Ja. Varför inte? Vill du berätta vad du gör samtidigt…

E2 (skriver och pratar samtidigt): Då tar jag 198 gånger 5…får jag använda miniräknare?

I: Ja

E2: Det blir 1386. Sen plussar jag 1000… 2386!

I: Vad då?

E2: … vet inte…kronor.

När eleverna uppmanades att skriva ett algebraiskt uttryck för beräkningen av hyrkostnaden för ”hur många dagar som helst ” visste de inte hur de skulle göra. Det verkade som de hade svårt att använda bokstäver för att beteckna en variabel i formeln. Efter en diskussion skrev E1 ett bokstavsuttryck som beskrev hans tankegång:

A * B = C

C + D = E

Uttrycket visade tydligt hans tidigare resonemang och logiskt tänkande, men brist på förståelse av det centrala i algebraiska formler.

E4 har visat ett annat sätt att räkna ut hyrkostnaden för 5 och 7 dagar:

198 * 5 = 990 + 1000 = 1990 kr

1990 + 198 +198 = 2386

I: Berätta hur du gjorde, bara så att vi förstår.

E4: Jag räknar först 5 dagar och sen lägger två dagar till…

Även att eleverna har blivit informerade om att rätta svaret inte var viktigt för undersökningen utan tillvägagångssättet i uppgifterna fortsatte de med att räkna ut de exakta hyrkostnaderna för olika dagar med visat intresse.

För att få svar på första frågan i uppgiften hade elever E5 och E6 först räknat ihop priset för 2, 3 och 10 dagar och sedan adderat det fasta kostnaden med produkterna:

1000 + 396 = 1396 kr

1000 + 594 = 1594 kr

1000 + 1980 = 2980 kr

I: Kan ni beskriva med ord vad ni gjorde?

E5: Det är lätt! Jag bara räknar vad det kostar för 2 dagar, sen för 3 osv… sen måste ha 1000 också.

E6: Jag tänkte att så får man ju räkna för 20 dagar…eller mer…

I: Just det! Det känns att ni kom på en speciell regel som man kan använda för att räkna ut hyrkostnaden för hur många dagar som helst. Skulle du kunna tänka dig att skriva det?...

E5: Det står ju här!

I: Ja. Men kan du skriva det med ord? Skriv bara som du sa.

E5: … (skriver) om man vill hyra ett svetsaggregat då får man betala 1000 kr och om man vill ha den i 2 dagar så det är 2 * 198 = 396 +1000 = 1396 kr osv med de andra.

I: Och om jag ber er att skriva ett algebraiskt uttryck som visar hur hyrkostnaden förändras beroende på hur många dagar behöver man hyra ett svetsaggregat?

E5: Ingen aning…jag har ju skrivit.

E6: Vet inte…vad menar du?

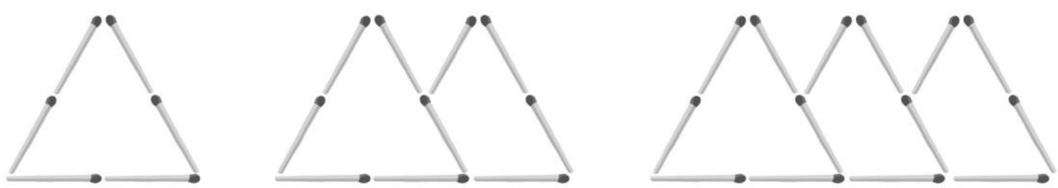
I: En generell regel som man kan använda för att räkna ut hyrkostnaden för hur många dagar som helst… Om ni hade fått använda bokstäver?

E5: Nej…det vet jag inte…har aldrig fattat det.

Eleverna har klart visat att uppgiften med en tydlig kontext känns helt normal och naturlig för dem. De kunde relatera till situationen och beräkna resultatet utifrån konkreta värden. Men när de uppmanades att skriva ett generellt uttryck med bokstäver blev de förvirrade. Samtliga elever hade svårigheter med att skriva en generell regel för hyrkostnaden. Antagligen hade de svårt med att uppfatta variabelbegreppet och se en tydlig struktur i sina lösningar för att kunna formulera ett algebraiskt uttryck.

*Uppgift 2:*

**Mönster med stickor**



**Figur 1** **Figur 2** **Figur 3**

1) Hur många stickor behövs till figur 5 enligt mönster?

2) Beskriv med egna ord hur mönstret växer, dvs hur antalet stickor ökar med figurernas nummer.

3) Skriv en regel som kopplar ihop antalet tändstickor med figurens nummer.

4) Vilket nummer har den figur som du kan bygga av 42 stickor?

Uppgiften avsåg att mäta elevernas förmåga att upptäcka ett mönster samt kunna hitta olika typer av generaliseringar i form av egna regler eller formler. Samtliga intervjuade elever hade inga problem med att räkna antal stickor i figur 5 genom att rita de två närmast följande figurerna. Fyra av sex elever fick fram en tabell som såg ut så här:

| ***Figur nr*** | ***Stickor*** |
|---|---|
| 1 | 6 |
| 2 | 10 |
| 3 | 14 |
| 4 | 18 |
| 5 | 22 |

I: Förklara med egna ord hur ni gjorde?

E1: Jag bara lägger till 4.

I: Bra. Kan ni försöka att skriva en regel för att räkna ut antalet stickor i ”vilken figur som helst”?

E2: För att bygga figur 1 behövs det 6 stickor, för att bygga figur 2 behövs det 10 stickor osv…

I: Men om vi ska ta reda på hur många stickor behövs det för figur 50?

(Paus)

E2: Hm…det var något man skulle gånga med n, eller ?...Jag vet inte…

I: Just det! Om vi tar för n numret på ”vilken figur som helst” kan ni skriva då ett uttryck för antalet stickor i figur n?

E1: Det kan man inte veta för att vi inte vet hur mycket är figur n…

I: Nej, men vi sa ju att n kan stå för figurens nummer, t.ex. 50.

E1: Jag vet! Det blir 50 + 4 eller…54n.

Eleverna kunde inte hitta någon bra strategi eller metod för att upptäcka hur mönstret var uppbyggt. Ingen av dem kunde svara rätt på hur många stickor som behövs för figur 50. De hade svårt att se sambandet mellan figurens nummer och antalet stickor. När eleverna försökte hitta en generell lösningsmetod visade de en brist i förståelsen för hur variabeln *n* skulle användas.

För att få svar på sista frågan har E3 och E4 förlängt tabellen tills de fått 42 stickor. Sedan konstaterade de att figurens nummer i detta fall blev 10. Dessa elever kom inte heller på någon generell regel för att kunna räkna ut antalet stickor i vilken figur som helst.

Elever E5 och E6 hade resonerat sig fram till ett generellt uttryck n + 4, vilket också visar en brist i förståelsen av variabeln *n.* Dessutom blev inte den valda metoden för att ange den tionde figuren korrekt. Beräkningen som eleven gjorde utgick endast från den första figurens antal stickor:

> I: Nu förstod jag inte hur ni tänkte. Varför gjorde ni så?
>
> E5: En triangel är 6 stickor…42 stickor dela med 6 stickor… det blir alltså 7.

## 4.2. Att behålla strukturen – nyckel till algebra?

Eftersom undersökningen visade att eleverna saknade struktur när de löste uppgifterna, vilket ledde till svårigheter i att kunna generalisera, genomfördes ytterligare en intervju med samma elever för att testa om tydligheten i uppgifternas underliggande strukturer skulle ge dem en bättre ingång till algebra. Avsikten med testet var att försöka få elever att se behovet av att använda bokstäver som ett naturligt sätt för att kunna generalisera. Intervjun utgick från två uppgifter (se bilagan 2) som liknade uppgifterna från föregående testet för att eleverna skulle känna sig bekväma med dem.

*Uppgift 1:*

När man ska ta körkort i Cityskolan kostar teorin och de obligatoriska körlektionerna tillsammans 4 300 kr. De extra körlektionerna kostar 450 kr per lektion.

a) Visa hur man beräknar kostnaden för körkortet beroende på hur många extra körlektioner man behöver ta.

   Fyll i tabellen nedan och beskriv med ord hur du tänker.

b) Skriv ett uttryck som visar hur kostnaden för körkortet förändras beroende på hur många extra körlektioner (*n*) man vill ta på Cityskolan.

Innan intervjun började fick eleverna veta att de blir handledda i deras tankegångar för att försöka upptäcka en generell regel i uppgiften. Dessutom de blev erbjudna att ha en färdig tabell med ifyllda antal extra körlektioner för att ha bättre överblick. Bokstaven *n* blev en naturlig förklaring för ”hur många extra lektioner man behöver”. Efter att eleverna först fick diskutera uppgiften med varandra, ställdes följande fråga till dem:

I: Jag ser att ni börjat räkna. Kan ni först förklara hur ni gör?

E1: Om man vill ta en extra körlektion ska man betala 4300 kr plus 450 (skriver i tabellen) …vänta, jag ska bara räkna!

I: Det räcker med bara uträkningen. Kan du fortsätta med 2 extra lektioner?

E1: Då tar jag 2 gånger 450…

I: Prova skriv på samma sätt som för 1 extra lektion.

E1: Ska jag ta 4300 först? …då är det 4300 plus 450 gånger 2?

I: Rätt. Fortsätt bara.

(elever fortsätter fylla i tabellen)

I: Har ni upptäckt nåt samband? Vad är det som ändras hela tiden?

E2: Det blir ju samma, bara antal lektioner blir olika.

I: Ja. Då kan vi skriva en formel för n antal lektioner – ett generellt uttryck.

E2: Det var ju lätt!

I: Absolut. Nu har ni ett färdigt algebraiskt uttryck för att räkna ut kostnaden för körkortet.

E1: Vad är det bra för?

I: Man kan använda färdiga formler i t.ex. Excel för att bekvämt räkna ut kostnaden för alla elever på körskolan, bara man vet hur många extra lektioner de tog.

Den färdiga tabellen som eleverna fyllde under diskussionen såg ut på följande sätt:

| **Antal extra körlektioner** | **Kostnaden** |
|---|---|
| 1 | 4300 + 450 * 1 |
| 2 | 4300 + 450 * 2 |
| 3 | 4300 + 450 * 3 |
| 4 | 4300 + 450 * 4 |
| 5 | 4300 + 450 * 5 |
| …. | …. |
| n | 4300 + 450 * n |

Eleverna har återigen visat svårigheter i att kunna skriva uträkningarna på en rad. Troligtvis fanns det en del osäkerhet om räkneregler, samt bristande förståelse för ett uttryck där olika delar innehåller olika fakta. Elev E1 började fundera på vad det färdiga uttrycket var bra för och efterlyste användningsområdena för algebra.

Intervjun med E3 och E4 ledde till liknande resultat. Eleverna blev erbjudna att visa hur de beräknade kostnaden för körkortet först för en extra körlektion, sedan för två, tre, fyra, fem och till slut *n* körlektioner. Även dessa elever visade osäkerhet i att kunna skriva beräkningen på en rad och försökte räkna ut resultatet för varje deloperation för sig.

E6 ifrågasatte användning av bokstaven *n* i tabellen:

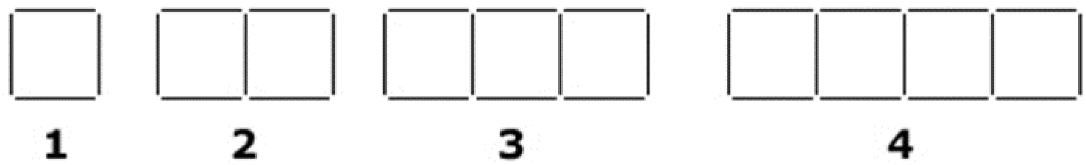
> E6: Men om man tar x istället för n? Vi brukar ju köra med x?...
>
> I: Ta x! Det spelar ingen roll vilken bokstav du väljer bara du vet säkert vad den står för.

Det märktes att eleverna kände sig bekvämare med bokstaven *x* som det obekanta talet. Det kan bero på att bokstaven *x* oftare används i undervisningen om algebraiska uttryck och ekvationer.

Intervjuerna visade att eleverna bättre kunde följa strukturen i uträkningarna om de blev handledda i sina tankegångar.

*Uppgift 2:*

**Mönster med stickor**




a) Visa hur man kan beräkna antalet stickor då man vet figurens nummer.

   Fyll i tabellen nedan och beskriv med ord hur du tänker.

b) Skriv en regel för hur man kan beräkna antalet stickor i figur *n*.

Även i denna uppgiften blev eleverna erbjudna att använda en tabell för att möjliggöra en överblick i hur sambandet mellan figurens nummer och antalet stickor såg ut. Sedan tydliggjordes att eleverna hade förstått uppgiften, speciellt om de visste vad bokstaven *n* stod för och vad figur *n* innebar. Dessutom klargjordes målet med uppgiften vilket var att försöka generalisera mönstret till ett algebraiskt uttryck, dvs. uttrycka formeln för den *n:te* figuren utifrån ett mönster. Detta skulle innebära en möjlighet att återge vilken figur som helst genom att använda det algebraiska uttrycket. Sedan fick eleverna fundera på hur ökning av antalet stickor samt hur sambandet mellan figurerna såg ut. Diskussionen med E1 och E2 om hur mönstret växte inleddes med en följande fråga:

> I: Vad är skillnaden mellan den första och andra figuren?
>
> E1: Tre stickor.
>
> I: Och mellan den andra och tredje figuren?
>
> E1: Det blir också tre.
>
> I: Alltså tändstickor ökar i varje ny figur med 3 stycken. Då måste 3 finnas med i vår regel för att räkna ut antal stickor i vilken figur som helst. Skulle ni kunna visa hur beräknar man antalet stickor t.ex. i figur 2?
>
> E2: (börjar på figur 1) Ska jag skriva 3? (skriver siffra 3) ...sen då?
>
> I: Är det 3 stickor i figur 1?
>
> E2: Nej, det är 4…ska jag plussa 1? (skriver 3 + 1 =4)
>
> I: Det stämmer! (Visar att den första figuren skiljer sig från de följande i mönstret). En tändsticka inte följer med i ökningen, den ligger hela tiden kvar. Detta kallas en konstant och ska också vara med i vår regel. Jag tänkte att vi inte ska räkna ut antalet stickor, bara titta på tillvägagångsättet. Kan du fortsätta att skriva uträkningen för figur 2?
>
> E2: (börjar skriva) 3 +…ska ta 3 till… 3 + 3…och 1? (fortsätter) 3 +3 +1…
>
> I: Och nästa figur?

Eleverna skrev uträkningarna i tabellen fram till figur 5. Då uppmanades de att svara på frågan om de började se ett mönster som upprepades från figur till figur.

> E1: …3: or plussas på och sen en etta!
>
> I: Hur många 3: or hade vi i figur 2, respektive i 3 osv.?
>
> E2: (räknar och upptäcker att antalet 3: or stämmer överens med figurens nummer) …två 3: or, tre 3: or…samma som figur!
>
> I: Då kan vi ju skriva multiplikation istället för addition. Men vad kan vi skriva i figur 1 då om man följer mönstret?
> E1: …en trea…det måste vara 3 * 1 + 1!
> I: Just det! Och hur n:te figuren ska se ut? n står för figurens nummer alltså…
> E1: 3 gånger figurens nummer plus 1!

Elever skrev sista raden i tabellen som till slut såg ut på följande sätt:

| Figur | Antal stickor |
|---|---|
| 1 | 3 * 1 + 1 |
| 2 | 3 * 2 + 1 |
| 3 | 3 * 3 + 1 |
| 4 | 3 * 4 + 1 |
| 5 | 3 * 5 + 1 |
| … | … |
| n | 3 * n + 1 |

Efter att en generell regel för antalet stickor i *n:te* figuren var bestämd uppmanades eleverna att testa om formeln stämde för figur 4, och när de såg att svaret sammanföll med antalet stickor på bilden, ville de testa formeln för figur 100. Genom att se en mening med det generella uttrycket skapade eleverna en viss förståelse för det abstrakta som inte syns. En liknande diskussion som resulterade i samma tillvägagångssätt för att lösa uppgiften hade även E3 med E4.

Under intervjun med E5 och E6 resonerades fram det generella uttrycket för antalet stickor i *n:te* figuren på ett annat sätt. E6 började diskussionen:

> E6: Det är fyra stickor i figur ett, sen lägger vi bara till tre i nästa…då blir det sju.
>
> I: Ja visst! Vill du skriva det ner i tabellen? Låt bara bli räkna ut summan.

E6 skrev 4 + 3 i andra raden, 4 + 3 + 3 i tredje raden osv. fram till den femte raden.

> I: Vad ska vi skriva då i det sista raden?
>
> E5: Jag tror det blir 4 + n… fyran är samma på alla.
>
> E6: Nej, 4 + 3 * n! Det är ju tre stickor två gånger och sen tre och fyra…
>
> I: Ja, det får vi se. Vad står n för?
>
> E5: … ja, det måste vara figurens nummer.
>
> I: Just det! Hur många stickor är det i figur 1 enligt din formel?
>
> E6: 4 + 3 * 1 blir 7... det blir inte rätt…
>
> I: Titta på tabellen som du skrivit, hur många 3: or finns i figur 1?
>
> E6: Inga.
>
> I: Och i figur 2?
>
> E6: Bara en.
>
> I: Alltså en mindre än figurens nummer. Skulle ni vilja skriva nu addition som multiplikation, då kan vi bättre se mönstret och uttryck för figur n.

Eleverna fyllde i tabellen klart och tillsammans kom de fram till det generella uttrycket för figur nummer *n:*

| Figur | Antal stickor |
| --- | --- |
| 1 | 4 |
| 2 | 4 + 3 = 4 + 3 * 1 |
| 3 | 4 + 3 +3 = 4 + 3 * 2 |
| 4 | 4 + 3 + 3 + 3 = 4 + 3 * 3 |
| 5 | 4 +3 +3 + 3 +3 = 4 + 3 * 4 |
| … | … |
| n | 4 + 3 * (n - 1) |

I slutet av intervjun ombeds eleverna att försäkra sig att formeln stämde för figur 1 och sedan räkna ut antalet stickor i figur 50.

Intervjun visade att eleverna var osäkra på hur man skulle använda variabeln *n* trots att de visste vad den innebar. Efter att eleverna fick se en tydlig struktur i uppgiften kunde de bättre se mönstret och skriva om det som ett generellt uttryck.

## 4.3. Sammanfattning

Resultat av intervjuerna visade att alla informanter kunde hantera den delen i uppgifterna som handlade om att räkna med konkreta siffror i praktiska vardags-problem, samt att se hur ett geometriskt mönster växer. Men när de kom till den delen som krävde att kunna generalisera utifrån dessa mönster tog det stopp. Eleverna blev förvirrade och osäkra. En elev föreslog att använda en variabel, *n,* men visste inte hur den skulle användas vilket tydde på brister i förståelse för variabelbegreppet. Samtliga informanter hade svårt att skriva uträkningsregler i uppgifterna på en rad. De ville gärna räkna ut delresultat och sedan genomföra nästa operation, vilket försvårade deras förmåga att generalisera. Med andra ord saknade eleverna struktur i sina uträkningar, vilket ledde till svårigheter i att skriva generella algebraiska uttryck.

I den delen av undersökningen där eleverna blev handledda i sina tankegångar till att få en tydligare struktur i uppgifterna, visade de bättre förståelse för generella uttryck som innehåller olika fakta på en enda rad, vilket är det centrala i de algebraiska formlerna.

## 4.4. Teoretisk tolkning

I avsnittet *Teoretisk utgångspunkt* togs upp en modell av Tall (2008) för utveckling av abstraktionsprocessen. Modellen visar uppdelningen av den matematiska kunskapen i tre världar som inte har någon hierarkisk relation till varandra förutom individens kognitiva utveckling. Eleverna i undersökningen har visat svårigheter med uppfattningen av bokstavssymboler, variabelbegreppet samt en strukturell behandling av uttryck. Förklaringen till svårigheterna kan ligga i de svaga förkunskaperna i algebra som eleverna hade med sig och som Tall (2008) benämner som *met-befores* eller föreställningar. Det finns skillnader i elevernas matematiska förståelse och bl.a. i förståelsen av symboler och uttryck enligt Tall (2008). Studien har pekat på att abstraktionsnivån som eleverna hade med sig inte var tillräcklig för att kunna formulera generaliseringar. Antagligen informanternas kognitiva utveckling till stora delar är kvar inom Talls (2008) konceptuella – förkroppsligade värld. Eftersom Talls modell inte förutsätter att individen går igenom världarna i någon speciell ordning har placeringen av elevernas kunskaper gett en lägesbeskrivning av deras matematiska utveckling som kan vara en utgångspunkt för den framtida undervisningen.

## 4.5. Slutsatser

Syftet med denna studie har varit att undersöka vilka svårigheter elever som går första året på gymnasieskolans yrkesprogram har när de arbetar med att formulera algebraiska uttryck och formler, samt vad svårigheterna beror på. Resultatet av undersökningen har visat att elever som ingick i studien hade svårt med att uppfatta generella uttryck, vilket stämmer överens med tidigare studier (Persson, 2010; Olteanu, 2000, 2001; Naalsund, 2012). Svårigheterna kan bero på olika faktorer och bl.a. att eleverna inte har utvecklat en tillräckligt hög abstraktionsnivå för att kunna hantera den symboliska algebran. Enligt Persson och Wennström (1999, 2000) är det nödvändigt för att förstå algebra att ha en god förståelse för variabelbegreppet. Alla informanter i min studie hade svårigheter med att uppfatta bokstavssymboler och använda dem som variabler. Detta bekräftar tidigare forskningsresultat som pekar på att svårigheter vid inlärning av algebra börjar i övergången från det konkreta till abstrakt tänkande, vilket innebär manipulering med bokstavssymboler (Tall, 2008). Att hantera konkreta siffror i praktiska sammanhang samt att beskriva med ord hur olika geometriska mönster växer hade eleverna i studien inga som helst problem med. Men när det var dags att skriva en generell regel för de upptäckta mönstren blev informanterna förvirrade och osäkra.

Frågan som ställdes utifrån dessa resultat löd: Kan man genom att betona uppgifternas underliggande strukturer få en bättre ingång till algebra? I undersökningen framkom det att ha kvar strukturen medan man upptäcker ett mönster i uppgiften hjälper eleverna att få en naturlig övergång till att använda bokstäver i generella uttryck samt bättre förståelse för vad algebra är bra till. Detta innebär en viktig konsekvens för elevernas algebrainlärning.

# 5. Sammanfattning och diskussion

## 5.1. Diskussion av resultaten

Undersökningen visade att de typer av uppgifter som förutsätter en förmåga att se det generella i det speciella av eleverna upplevdes som svåra. Enligt flera forskare (Persson, 2010; Olteanu, 2000, 2001; Naalsund, 2012) blir för många elever övergången mellan aritmetiken och algebran svår och ger upphov till ett avståndstagande. Att använda bokstäver som symboler för en variabel kräver en hög abstraktionsnivå och behöver vara grundat på förståelse. Elevernas låga abstraktionsnivån visade sig i studien i deras oförmåga att kunna generalisera. En av de faktorer som bromsade elevernas förmåga till algebraisk tänkande var svag förståelse för variabelbegreppet, vilket överensstämmer med tidigare forskning inom området (Persson, 2010). För att eleverna ska kunna skapa bättre förståelse för variabler behöver undervisningen bygga på elevernas erfarenheter och utnyttja ett vardagsspråk som beskriver situationen. Jag håller med Bergsten m.fl. (1997) om att eleverna behöver se poängen med att använda bokstäver annars ser de ingen mening med algebra. Därför bör algebraundervisningen handla mer om att skapa tillfällen som hjälper eleverna att utveckla förståelse för variabelbegreppet, lära sig teckna samband, föra logiska resonemang eller lösa problem.

Denna studie har inte kunnat bevisa att eleverna hade brister i sina aritmetiska färdigheter, vilket flera tidigare studier pekat på (Olteanu, 2000, 2001; Persson, 2010). Jag hade inte tillräckligt med undersökningsmaterial som klart kunde visa vilka brister eleverna hade inom detta område. Däremot upptäckte jag att eleverna gärna undvek att använda bokstäver och kände sig mer säkra i beräkningar med konkreta tal i uppgifter som handlade om vardagssituationer, vilket överensstämmer med Talls (2008) slutsats om att en del elever i högre åldrar dröjer sig kvar i ett procedurellt sätt att se på matematiken, något som försvårar deras algebrainlärning.

Min studie riktade sig mot elevernas förståelse för vad algebra är bra till. Jag insåg att ett bra sätt att få en uppfattning om detta var att försöka studera matematiska mönster, vilket enligt Bednarz m.fl. (1996) är ett effektivt sätt att initiera algebra på. Att arbeta med mönster anses vara en väl beprövad metod när det gäller att se generella samband och översätta dem till algebraiskt språk. Variabelbegreppet kommer då in på ett naturligt sätt och det är lättare att se vitsen med att använda bokstäver menar författarna.

Eleverna i min studie hade inte helt klart för sig hur de skulle använda bokstäver i algebraiska uttryck och såg inte meningen med att kunna generalisera. Precis som Tall (2008) påstår i sin forskning, blev eleverna förvirrade när bokstäver började dyka upp i andra sammanhang än i alfabetet. Elevernas ”met-befores” eller förkunskaper passade inte samman med denna nya situation, dvs. att skriva generella uttryck med bokstäver.

Under intervjuerna upptäckte jag att elever som ingick i min studie hade svårigheter med att skriva uträkningsregler i uppgifterna på en rad. Jag antog att en av orsakerna till detta kunde vara elevernas sämre förmåga att se uppgifternas underliggande strukturer. Att behålla struktur skulle kunna vara nyckel till algebra. Därför testade jag att i nästa steg handleda eleverna i deras tankegångar för att hjälpa dem att behålla uppgifternas struktur och därmed få svar på studiens andra frågeställning. Resultatet tyder på att eleverna kunde förstå meningen med att använda bokstäver och att skriva generella uttryck i uppgifterna bättre. Jag tror, och som studien har bekräftat, att elever lättare kan inse värdet av variabelbegreppet om de på ett strukturerat sätt får skapa egna symboluttryck samt lära sig att skriva sammansatta uttryck.

Man bör också diskutera elevernas motivation och attityder om man vill att de ska lyckas med algebra. Enligt Persson (2010) är detta en av de viktigaste faktorerna för att uppnå bra resultat i undervisningen. Problematiken med gymnasieskolans yrkesprogram enligt Engström (2015) handlar om att i strävan för att höja kvaliteten och utveckla programmen tunnas yrkesinnehållet i utbildningen ut och ersätts av allmänna ämnen. Som en följd av detta ökar de teoretiska kraven på eleverna. De flesta elever som går yrkesförberedande program är skoltrötta och har i regel låga prestationer i matematik menar Engström (2015). Jag har noterat att eleverna i min undersökning hade liknande tendenser samt dålig motivation för att lära sig algebra. Det kan bero på att eleverna inte känner till hur algebra kan tillämpas i deras yrke, och som en följd inte ser meningen med att använda den i beräkningar. Jag anser att mer infärgad matematikundervisning, dvs. integrerad matematik och karaktärsämnen, skulle kunna bidra till ökad motivation hos elever, samt bättre förståelse för t.ex. algebra och dess vikt i yrket. Eleverna måste se helheten för att lyckas.

Resultatet av undersökningen visat vilka svårigheter har en del elever med algebra och hur kan man hjälpa dem i undervisningen för att öka deras förståelse och motivation. I arbete med dessa elever är det viktigt att inte fastna i det kategoriska perspektivet på lärandet som enligt Persson (2001) utgår ifrån att det är eleven som har svårigheter och att åtgärderna sätts in endast på individnivå. Istället skall man fokusera på det relationella perspektivet som beskriver lärandet utifrån de yttre, sociala och organisatoriska förhållandena. I min studie koncentrerade jag mig på undervisningen som kan förbättras utifrån elevernas behov.

## 5.2. Metoddiskussion

Valet av semistrukturerade intervjuer som studiens datainsamlingsmetod har gett mig möjlighet att besvara mina problemformuleringar på ett tillfredsställande sätt. Under intervjuerna kunde jag ställa följdfrågor, be om förklaringar och förtydliganden vilket enligt Bryman (2011) ger högre validitet i en undersökning. I samtalen med mina informanter framkom det vilka delar som var problematiska för dem och nödvändiga att uppmärksamma för att utveckla deras lärande i algebra. Intervjuerna hjälpte mig att ta reda på vilka svårigheter eleverna hade när de skulle generalisera samt vad lärare behöver ta hänsyn till i undervisningen för att utveckla elevernas kunskaper mot större förståelse.

Valet av ytterligare intervjuer för att försöka handledda elever i deras tankegångar gav mig en möjlighet till att följa upp svårigheter som eleverna hade och hjälpa dem att få bättre förståelse för algebra. Detta överensstämmer med tidigare forskning som pekar på att uppföljningsintervjuer efter genomförda tester minskar missuppfattningar hos elever (Makonye & Khanyile, 2015).

Det var definitivt en fördel att få intervjua två elever samtidigt. Jag upplevde att det var lättare att komma igång med diskussionerna eftersom eleverna kände kamratstödet som Egodawatte (2009) nämner i sin studie. Även Bryman (2011) talar om att i fokusgruppintervjuer brukar deltagarna stimulera varandra till diskussioner, vilket ger bredare svar på studiens frågor.

Intervjuerna i min studie utgick från fyra utvalda uppgifter som handlade om att kunna upptäcka ett mönster eller en gemensam regel och sedan skriva ett generellt uttryck för detta. Min inspiration fick jag av Bednarz m.fl. (1996) som menar att arbete med generaliseringar är ett bra sätt att få ingång till algebra. Två av uppgifterna hade jag hämtat ur vardagliga situationer för att eleverna lättare skulle kunna relatera till dem. Jag upplevde att det kändes naturligt för eleverna att se hur algebra kan representera verkliga situationer, något som kan vara motiverande för dem enligt Bergsten m. fl. (1997).

Jag anser att de valda uppgifterna motsvarade mina förväntningar när det gällde att få svar på mina frågeställningar. De blev ett bra underlag för diskussionerna.

## 5.3. Specialpedagogiska implikationer

Matematikundervisningen skall utgå från elevernas behov enligt skollagen (SFS 2010:800). Därför borde undervisande lärare ha uppfattning om var eleverna befinner sig i sin matematikutveckling för att kunna hjälpa dem vidare på bästa sätt. Speciallärare har i det sammanhanget en viktig roll. Enligt högskoleförordningen ska den blivande specialläraren kunna ”analysera och medverka i förebyggande arbete och bidra till att undanröja hinder och svårigheter i olika lärmiljöer, samt vara en rådgivare i frågor som rör elevers matematikutveckling” (SFS 1993:100). Därför ser jag kartläggning av elevernas matematiksvårigheter som en del av mitt uppdrag som speciallärare.

I min studie kom jag fram till att elevernas svårigheter med att kunna generalisera kan bero på att de har svårt med att se underliggande strukturer i uppgifterna vilket kan försämra algebrainlärningen. Att tydliggöra struktur kan bidra till bättre förståelse samt ökad motivation hos elever och därmed förbättra matematikundervisningen.

## 5.4. Fortsatt forskning

Matematikundervisningen på gymnasiets yrkesprogram behöver ha en närmare koppling till elevernas yrkesinriktning enligt Gy 11 (Skolverket, 2011). Det skulle vara intressant att undersöka vilka effekter både för elevernas allmänna inställning till matematik och särskilt deras algebraiska tänkande, som infärgningen av matematikundervisningen ger. Speciallärarens roll i detta kan vara att bidra med ”kunskap om områdets vetenskapliga grund och aktuellt forsknings- och utvecklingsarbete” som högskoleförordningen förespråkar (SFS 1993:100).

## Referenser


Aspelin, J. & Persson, S. (2011). *Om relationell pedagogik.* Gleerups Utbildning AB: Malmö

Bednarz, N., Kieran, C. & Lee, L. (red.) (1996). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla*. (1. uppl.) Mölndal: Institutionen för ämnesdidaktik, Univ.

Bryman, A. (2011). *Samhällsvetenskapliga metoder*. Malmö: Liber.

Egodawatte, G. (2009). Is algebra really difficult for all students? *Acta Didactica Napocensia,* 2, (4), 101–106.

Engström, A. (2015). *Specialpedagogiska frågeställningar i matematik*. Karlstad: Karlstads universitet.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2010). *Den kvalitativa forskningsintervjun.* Lund: Studentlitteratur.

Lundberg, I. & Sterner, G. (2009.). *Dyskalkyli - finns det? Aktuell forskning om svårigheter att förstå och använda tal.* Göteborg: Nationell centrum för matematikutbildning.

Makonye, J., & Khanyile, D. (2015). Probing Grade 10 Students about Their Mathematical Errors on Simplifying Algebraic Fractions. *Research in Education,* 94, (1), 55.

Naalsund, M. (2012). Why is algebra so difficult? A study of Norwegian lower secondary students´ algebraic proficiency. *Series of dissertations submitted to the Faculty of Educate University of Oslo No.154.* AIT Oslo AS.

Olteanu, C. (2000). *Varför är skolalgebra svårt?* Rapport Högskolan Kristianstad.

Olteanu, C. (2001). *Vilka är elevernas svårigheter i algebra?* Rapport Högskolan Kristianstad.

Persson, B. (2001). *Elevers olikheter och specialpedagogisk kunskap*. Stockholm: Liber.

Persson, P. & Wennström, T. (1999, 2000). *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse*. Rapport I, II, III, IV, V, VI, Högskolan Kristianstad.

Persson, P. (2010). *Räkna med bokstäver! En longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå* (avhandling för doktorsexamen, Luleå Tekniska Universitet, 2010)

Persson, P. (2002, mars). Behöver alla lära sig algebra?: *Nämnaren*, 3. Hämtad april 15, 2017, från http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/2431_02_3.pdf

Palm, A. (2008, mars). Missuppfattningar i algebra problem för läraren eller eleven?: N*ämnaren*, 3. Hämtad april 20, 2017, från http://ncm.gu.se/pdf/namnaren/3842_08_3.pdf

Repstad, P. (2007). *Närhet och distans: kvalitativa metoder i samhällsvetenskap*. (4., [rev.] uppl.) Lund: Studentlitteratur.

Tall, D. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 20, (2), 5-24.

Lgr 11 (2011). *Läroplan för grundskola, förskoleklassen och fritidshemmet*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.

SKOLFS (2011:261). *Läroplan för gymnasieskolan.* Stockholm: Utbildningsdepartementet.

SFS 2010:800. *Skollag.* Stockholm: Sveriges riksdag.

SFS 1993:100. *Högskoleförordningen.* Stockholm: Utbildningsdepartementet.

Vetenskapsrådet (2011). *Forskningsetiska principer – inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Tillgänglig på: http://www.vr.se.

## Bilaga 1

**Diskussionsuppgifter 1**

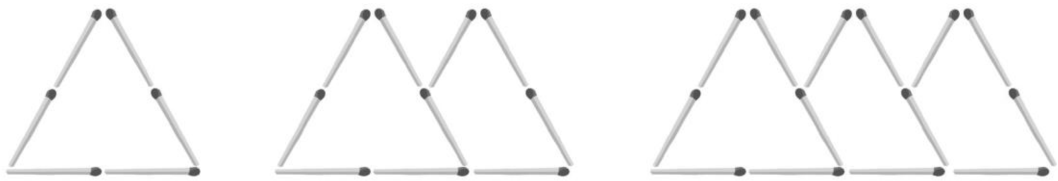
<u>*Uppgift 1:*</u>

På ett företag behöver man hyra ett svetsaggregat. Att hyra en sådan på ett svetscenter kostar i fast avgift 1000 kr och sedan 198 kr /dag.

c) Visa hur beräknar du hyrkostnaden för svetsaggregatet beroende på antal dagar som det ska hyras ut.
d) Skriv ett uttryck som visar hur hyrkostnaden förändras beroende på hur många dagar man behöver hyra ett svetsaggregat på detta företag.

<u>*Uppgift 2:*</u>

**Mönster med stickor**



**Figur 1** **Figur 2** **Figur 3**

5) Hur många stickor behövs till figur 5 enligt mönster?
6) Beskriv med egna ord hur mönstret växer, dvs hur antalet stickor ökar med figurernas nummer.
7) Skriv en regel som kopplar ihop antalet tändstickor med figurens nummer.
8) Vilket nummer har den figur som du kan bygga av 42 stickor?

## Bilaga 2

**Diskussionsuppgiftger 2**

Uppgift 1:

När man ska ta körkort i Cityskolan kostar teorin och de obligatoriska körlektionerna tillsammans 4 300 kr. De extra körlektionerna kostar 450 kr per lektion.

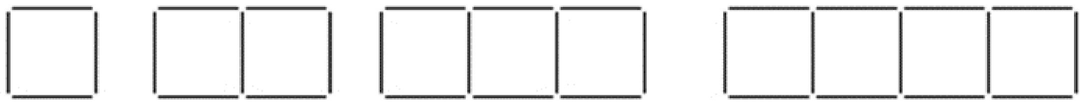
c) Visa hur man beräknar kostnaden för körkortet beroende på hur många extra körlektioner man behöver ta.
Fyll i tabellen nedan och beskriv med ord hur du tänker.

d) Skriv ett uttryck som visar hur kostnaden för körkortet förändras beroende på hur många extra körlektioner (*n*) man vill ta på Cityskolan.

| Antal dagar | Kostnaden |
|---|---|
| **1** | |
| **2** | |
| **3** | |
| **4** | |
| **5** | |
| **…….** | |
| ***n*** | |

Uppgift 2:

**Mönster med stickor**



1 2 3 4

a) Visa hur man kan beräkna antalet stickor då man vet figurens nummer.
Fyll i tabellen nedan och beskriv med ord hur du tänker.

b) Skriv en regel för hur man kan beräkna antalet stickor i figur *n*.

| Figur nr | Antal stickor |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| ... | |
| n | |

## Bilaga 3

### Information till målsman

Mitt namn är Svetlana Bengtsson och jag går min sista termin på speciallärarprogrammet med specialisering matematikutveckling vid Kristianstad Högskola. För mitt examensarbete kommer jag att genomföra en studie på ditt barns Gymnasieskola. Målet med studien är att hitta möjliga förklaringar till elevernas svårigheter med algebra samt utvecklingsvägar om hur man kan förbättra matematikundervisning med avseende att möta alla elevers behov i detta område. För att genomföra detta behöver jag intervjua några elever i anslutning till ett litet test som de erbjuds att göra vid intervjutillfälle. Själva intervjun tar ungefär 30 minuter i anspråk och eleven ska inte vara förberedd på något sätt. Intervjun kommer att spelas in och transkriberas för att underlätta analys av studien. All information som jag får i denna studie kommer inte att användas i något annat sammanhang än detta, vilket innebär att den som deltar kan förvissa sig om att informationen i alla avseende kommer att behandlas konfidentiellt. Intervjuerna kommer att äga rum under vecka 12 2017. Rektor har godkänt att några av skolans elever deltar i undersökningen, under förutsättning att eleverna själva och dess målsmän godtar att få vara med. Jag ber därför om tillåtelse att få intervjua er son eller dotter och hoppas emellertid att han eller hon kan ställa upp på denna undersökning. Om Du har frågor angående undersökningen är Du välkommen att kontakta mig.

Med vänliga hälsningar

Svetlana Bengtsson

e-mail: svetlana.bengtsson@orkelljunga.se

……………………………………………………………………………………………

☐ Jag tillåter att mitt barn deltar i studien.

☐ Jag vill ej att mitt barn deltar i studien.

Målsmans underskrift: Elevens underskrift:

---------------------------------------- --------------------------------------

## Bilaga 4

### Information till elever

Min undersökning handlar om att få svar på frågor som berör undervisning i algebra. Jag är intresserad av vad är det som gör att algebra känns så svårt för många elever. Jag skulle behöva hjälp med att få bättre förståelse om hur tänker elever när de arbetar med uppgifter som kan lösas med hjälp av algebra.

Om du vill så får du vara med i undersökningen. Då kommer du tillsammans med en kamrat arbeta med några matteuppgifter som ni får diskutera med varandra. Jag kommer att vara med och prata med er om hur ni gör när ni löser uppgifterna. Jag vill också påminna dig att jag kommer att spela in informationen för bearbetning.

Du väljer helt själv om du vill vara med i undersökningen. Du kan när som helst avbryta deltagandet. Det är bara jag och min handledare som får tillgång till allt du säger. All information kommer att behandlas konfidentiellt och resultatet av undersökningen kommer inte att användas i något annat sammanhang än detta. Ingen information som kan förknippas med ditt svar eller ditt namn kommer att föras vidare.

Tack för din hjälp!

Svetlana Bengtsson